Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 8

Thema der Woche: Geometrische Eigenschaften von Gruppen

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Schwache Kommensurabilität und Quasi-Isomerie, *6 Punkte*)
Sei G eine Gruppe.

a) Sei $G' < G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass G' genau dann endlich erzeugt ist, wenn G endlich erzeugt ist. Zeigen Sie außerdem, dass G quasi-isometrisch zu G' ist, falls die beiden Gruppen endlich erzeugt sind.

b) Sei N eine endliche, normale Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass G/N genau dann endlich erzeugt ist, wenn G endlich erzeugt ist. Zeigen Sie außerdem, dass G quasi-isometrisch zu G/N ist, falls die beiden Gruppen endlich erzeugt sind.

Aufgabe 2 (Quasi-Isometrie freier Gruppen, *6 Punkte*)
Zeigen Sie, dass F_n und F_m für alle $n, m \geq 2$ quasi-isometrisch sind.

Aufgabe 3 (Eigentliche Gruppenwirkungen, *6 Punkte*)
Sei X ein eigentlicher metrischer Raum und $G \curvearrowright X$ eine isometrische Gruppenwirkung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) Die Wirkung $G \curvearrowright X$ ist eigentlich.

ii) Für alle $x \in X$ ist die Bahn $G.x$ lokal endlich, das heißt, für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$ gilt $|\{g \in G |\ g.x \in K\}| < \infty$.

iii) Jedes $x \in X$ hat einen endlichen Stabilisator und eine Umgebung U, so dass $g.U \cap U \neq \emptyset$ impliziert, dass $g.x = x$ ist.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (Anwendungen von Švarc-Milnor)
Überprüfen Sie für die folgenden beiden Gruppenwirkungen, welche Voraussetzungen von Švarc-Milnor erfüllt sind und welche nicht.

a) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ durch Matrixmultiplikation.

b) $\mathbb{Z}$ operiert auf $X = \{(a^3, b) |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit der von der euklidischen Standard-Metrik induzierten Metrik durch $n.(a^3, b) = (a^3, b + n)$.

Aufgabe 5 (Überlagerungen, Decktransformationen und Švarc-Milnor)
Sei $T = S^1 \times S^1$ der Torus mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten flachen Metrik.

a) Überlegen Sie sich, dass T ein geodätischer eigentlicher Raum ist.
b) Betrachten Sie nun die universelle Überlagerung $p\colon X \to T$. Was ist X und wodurch ist p gegeben?
c) Überlegen Sie sich, dass sich die Eigenschaften aus a) von T auf X übertragen.
d) Was ist die Decktransformationsgruppe G von p? Wie wirkt diese auf X? Schreiben Sie die Wirkung konkret auf!
e) Zeigen Sie, dass die G eigentlich, kokompakt und durch Isometrien auf X wirkt.
f) Was folgt aus den vorherigen Teilaufgaben?