Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 9

Thema der Woche: Hyperbolische Geometrie

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Eine Verallgemeinerung von Švarc-Milnor, *12 Punkte*)
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, G eine Gruppe, die auf X durch Homöomorphismen wirkt und sei $U \subseteq X$ eine offene Menge mit $G.U = X$.

a) Zeigen Sie, dass G von $S = \{g \in G \mid g.U \cap U \neq \emptyset\}$ erzeugt wird.

b) Sei $A_S = \{a_s \mid s \in S\}$ und sei X einfach zusammenhängend. Zeigen Sie, dass $G = \langle A_S \mid R\rangle$ ist mit $R = \{a_{s_1}a_{s_2}a_{s_3}^{-1} \mid s_i \in S,\ U \cap s_1.U \cap s_3.U \neq \emptyset,\ s_1s_2 = s_3 \text{ in } G\}$:

   i) Sei K der Cayleykomplex zu A_S. Wieso genügt es, im Folgenden zu zeigen, dass K einfach zusammenhängend ist?

   ii) Konstruieren Sie eine G-äquivariante Abbildung $f\colon \mathrm{Cay}(G, A_S) \to X$ mit $1 \mapsto x_0$, wobei $x_0 \in U$ ein fest gewählter Punkt sei.

   iii) Zeigen Sie nun, dass die gerade konstruierte Abbildung f zu einer stetigen und G-äquivarianten Abbildung $g\colon K \to X$ fortsetzen lässt, indem Sie zeigen, dass jede stetige Abbildung $l\colon \partial D^2 \to \mathrm{Cay}(G, A_s)$ stetig zu einer stetigen Abbildung $D^2 \to K$ fortgesetzt werden kann. Betrachten Sie dazu eine endliche Triangulierung T von D mit der Eigenschaft, dass für jede Ecke $v \in T$ ein $g_v \in G$ existiert, so dass die Erweiterung $\phi\colon D \to X$ alle Dreiecke mit Ecke v nach $g_v.U$ abbildet. Nun untersuchen Sie, was mit den Bildern von Dreiecken unter ϕ geschieht.
   Wie lassen sich die Elemente von S und R nun beschreiben?

c) Zeigen Sie, dass die Aussage von Teil b) nicht mehr stimmt, wenn die Voraussetzung „X einfach zusammenhängend“ weggelassen wird.

Aufgabe 2 (Endlich präsentierte Gruppen, *6 Punkte*)
Zeigen Sie, dass eine Gruppe genau dann endlich präsentiert ist, wenn sie eigentlich, kokompakt und durch Isometrien auf einem einfach zusammenhängenden, geodätischen Raum wirkt.

Präsenzaufgabe:

Aufgabe 3 (Ein Präsentationskomplex)
Zeigen Sie, dass der Präsentationskomplex von $\langle a, b \mid a^2, b^2\rangle$ homöomorph ist zu zwei an einem Punkt verklebten Projektiven Ebenen. Wie sieht der zugehörige Cayleykomplex aus?

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 17.06.15, in den Übungen.
Bitte heften Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen.