Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 10

Thema der Woche: Hyperbolische Geometrie

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Ein Fundamentalbereich in $\mathbb{H}^2$, *6 Punkte*)
Betrachte die Gruppe $\Gamma = \langle A \rangle$ mit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Die von $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^2$ induzierte Wirkung auf $\mathbb{C}$ hat zwei Fixpunkte und ist eigentlich diskontinuierlich. Bestimmen Sie einen Fundamentalbereich der Wirkung, in dem Sie seine Schnittpunkte mit der reellen Achse berechnen.

Aufgabe 2 (Hyperbolische Gruppen und quasi-isometrische Einbettungen, *6 Punkte*)
Seien G und H Gruppen mit endlichen Erzeugendensystemen S und T. Es sei H hyperbolisch und sei $f\colon (G, d_S) \to (H, d_T)$ eine quasi-isometrische Einbettung. Zeigen Sie, dass G hyperbolisch ist.

Aufgabe 3 (Fuchssche Gruppen und Produkte von hyperbolischen Gruppen, *6 Punkte*)
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. G und H seien endlich erzeugte Gruppen.

a) Jede Untergruppe einer Fuchsschen Gruppe ist Fuchssch.
b) Wenn G endlich und H hyperbolisch ist, dann ist $G \times H$ hyperbolisch.
c) Wenn $G \times H$ nicht hyperbolisch ist, dann ist G oder H nicht hyperbolisch.

Präsenzaufgabe:

Aufgabe 4 ($\mathbb{R}$-Bäume)
Ein metrischer Raum X heißt $\mathbb{R}$-*Baum*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

i) Es existiert genau ein geodätisches Segment $[x, y]$ von x nach y.
ii) Wenn $[x, z] \cap [z, y] = \{z\}$ ist, dann gilt $[x, z] \cup [z, y] = [x, y]$.

Überlegen Sie sich für die folgenden Räume, ob diese $\mathbb{R}$-Bäume sind oder nicht.

a) Simpliziale Bäume mit der kombinatorischen Metrik
b) $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Standard-Metrik
c) $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik d, wobei d definiert ist durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |x_2 - x_1| + |y_2| & \text{falls } x_1 \neq x_2 \\ |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2 \end{cases}$$

Aufgabe 5 (Präsentations- und Cayleykomplexe)
Sei $G = \langle S|\ R\rangle$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die beiden Konstruktionen des Präsentationskomplexes aus der Vorlesung $K(S, R)$ und K_G denselben CW-Komplex definieren und dass die universelle Überlagerung $\tilde{K}_G$ mit dem Cayleykomplex K' übereinstimmt.

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 24.06.15, in den Übungen.
Bitte heften Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen.