

(Sommersemester 2015)
Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 11

Thema der Woche: Das Wortproblem

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Verklebung von hyperbolischen Räumen, 6 Punkte)

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) hyperbolische Räume mit $w_1 \in X_1$ und $w_2 \in X_2$. Eine Metrik d auf $Y = X_1 \sqcup X_2 / w_1 \sim w_2$ sei durch

$$d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & x, y \in X_i \\ d_i(x, w_i) + d_j(w_j, y) & x \in X_i, y \in X_j, i \neq j \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass Y ein hyperbolischer Raum ist.

Aufgabe 2 (Freies Produkt von zyklischen Gruppen, 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein $\delta \geq 0$ existiert, so dass das freie Produkt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ eine δ -hyperbolische Gruppe ist.

Aufgabe 3 (Trapping für lokale Geodäten, 6 Punkte)

- a) Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer Raum für ein $\delta \geq 0$ und sei $\gamma: [0, l] \rightarrow X$ eine c -lokale Geodäte, das heißt, dass für alle $[t, t'] \subseteq [0, l]$ mit $|t' - t| < c$ die Einschränkung $\gamma|_{[t, t']}$ eine Geodäte ist. Zeigen Sie, dass für eine Geodäte $\gamma': [0, l] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(l) = \gamma'(l)$ gilt, dass $\text{Im}(\gamma) \subseteq U_{2\delta}(\text{Im}(\gamma'))$ ist.
- b) Gibt es lokale Geodäten, die keine Geodäten sind? Finden Sie Beispiele!

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (\mathbb{R} -Bäume)

Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum genau dann ein \mathbb{R} -Baum ist, wenn er 0-hyperbolisch ist.

Aufgabe 5 (Dehn-Präsentierung)

Betrachte die Präsentation $\langle a, b | a^2, b^3, ab^{-1}ab^{-1} \rangle$.

- a) Welche Ihnen bekannte Gruppe wird durch die Präsentation beschrieben?
- b) Ist das eine Dehn-Präsentierung? Wenn ja, warum? Wenn nein, bestimmen Sie eine Dehn-Präsentierung, falls eine existiert!