Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

Geometrische Gruppentheorie
ein paar Definitionen

Seien im Folgenden $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.

Definition 4.1. Eine Abbildung $f : X \mapsto Y$ ist

- eine *isometrische Einbettung*, wenn gilt:
$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$
- eine *Isometrie*, wenn f eine bijektive isometrische Einbettung ist.
Äquivalent dazu: f ist isometrische Einbettung und es exisiert eine isometrische Einbettung $g : Y \mapsto X$ so, dass $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

Die Räume X und Y heißen *isometrisch*, falls eine Isometrie $f : X \mapsto Y$ existiert.

Für unsere Zwecke sind Isometrien zu starr. Wir schwächen das Konzept daher ab und erlauben multiplikative Fehler:

Definition 4.2. Eine Abbildung $f : X \mapsto Y$ ist

- eine *Bilipschitz–Einbettung*, wenn eine reelle Konstante $c \geq 1$ existiert so, dass gilt:
$$\frac{1}{c} d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$
- eine *Bilipschitz–Äquivalenz*, wenn f eine bijektive bilipschitz Einbettung ist.
Äquivalent dazu: wenn f eine Bilipschitz–Einbettung ist und es eine weitere Bilipschitz–Einbettung $g : Y \mapsto X$ gibt für die gilt: $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

Die Räume X und Y sind *bilipschitz (äquivalent)*, falls eine Bilipschitz–Äquivalenz $f : X \mapsto Y$ existiert.

Bilipschitz–Äquivalenzen sind Homöomorphismen topologischer Räume und erhalten daher lokale topologische Informationen. Das ist für uns immer noch zu starr. Wir schwächen das Konzept daher weiter ab und erlauben zusätzlich additive Fehler:

Definition 4.3. Eine Abbildung $f : X \mapsto Y$

- ist eine *(C,D)–quasi-isometrische Einbettung*, wenn es reelle Konstanten $C \geq 1$ und $D \geq 0$ gibt so, dass gilt:
$$\frac{1}{C} d_X(x, x') - D \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq C d_X(x, x') + D \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$
- hat *endlichen Abstand* von einer Abbildung $\tilde{f} : X \mapsto Y$, wenn es eine reelle Konstante $C' > 0$ gibt mit $d_Y(f(x), \tilde{f}(x)) \leq C'$ für alle $x \in X$.
- ist eine *(C,D)–Quasi–Isometrie* (kurz QI), wenn f eine (C,D)–quasi–isometrische Einbettung ist und es eine quasi-isometrische Einbettung $g : Y \mapsto X$ gibt, für die $f \circ g$ endlichen Abstand von id_Y und $g \circ f$ endlichen Abstand von id_X hat.

Die Räume X und Y sind *quasi–isometrisch*, falls es eine Quasi–Isometrie $f : X \mapsto Y$ gibt. Wir schreiben dann $X \sim_{QI} Y$.