Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat
der k. Friedrich-Alexanders-Universität
zu Erlangen.

Erlangen.
Verlag von Andreas Deichert.
1872.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der projectivischen[1]) Geometrie die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projiciren nicht ungeändert bleiben, so hat man in neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projectivischen Standpuncte aufzufassen, so dass nun die projectivische Methode die gesammte Geometrie umspannt. Die metrischen Eigenschaften erscheinen in ihr nur nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Beziehungen derselben zu einem Fundamental-Gebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise.

Vergleicht man mit der so allmählich gewonnenen Auffassungsweise der räumlichen Dinge die Vorstellungen der gewöhnlichen (elementaren) Geometrie, so entsteht die Frage nach einem allgemeinen Principe, nach welchem die beiden Methoden sich ausbilden konnten. Diese Frage erscheint um so wichtiger als sich neben die elementare und die projectivische Geometrie, ob auch minder entwickelt, eine Reihe anderer Methoden stellt, denen man dasselbe Recht selbständiger Existenz zugestehen muss. Dahin gehören die Geometrie der reciproken Radien, die Geometrie der rationalen Umformungen etc., wie sie in der Folge noch erwähnt und dargestellt werden sollen.

Wenn wir es im Nachstehenden unternehmen, ein solches Princip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgränzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von Manchem

1) Vergl. Note I. des Anhangs.

gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige zusammenfassende Betrachtungen zu publiciren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disciplinen zerfallen ist[1]), die sich ziemlich unabhängig von einander weiter bilden. Es lag dabei aber auch noch die besondere Absicht vor, Methoden und Gesichtspuncte darzulegen, welche von Lie und mir in neueren Arbeiten entwickelt wurden. Es haben unsere beiderseitigen Arbeiten, auf wie verschiedenartige Gegenstände sie sich auch bezogen, übereinstimmend auf die hier dargelegte allgemeine Auffassungsweise hingedrängt, so dass es eine Art von Nothwendigkeit war, auch einmal diese zu erörtern und von ihr aus die betr. Arbeiten nach Inhalt und Tendenz zu characterisiren.

War bisher nur von geometrischen Forschungen die Rede, so sollen darunter mit verstanden sein die Untersuchungen über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich, unter Abstreifung des für die rein mathemathische Betrachtung unwesentlichen räumlichen Bildes[2]), aus der Geometrie entwickelt haben[3]). Es gibt bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten eben solche verschiedene Typen, wie in der Geometrie, und es gilt, wie bei der Geometrie, das Gemeinsame und das Unterscheidende unabhängig von einander unternommener Forschungen hervorzuheben. Abstract genommen wär es im Folgenden nur nöthig, schlechthin von mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu reden; aber durch Anknüpfung an die geläufigeren räumlichen Vorstellungen wird die Auseinandersetzung einfacher und verständlicher. Indem wir von der Betrachtung der geometrischen Dinge ausgehen und an ihnen als einem Beispiele die allgemeinen Gedanken entwickeln, verfolgen wir den Gang, den die Wissenschaft in ihrer Ausbildung genommen hat, und den bei der Darstellung zu Grunde zu legen gewöhnlich das Vortheilhafteste ist. —

---

1) Vergl. Note II. 2) Vergl. Note III. 3) Vergl. Note IV.

Eine vorläufige Exposition des im Folgenden besprochenen Inhaltes ist hier wohl nicht möglich, da sich derselbe kaum in eine knappere Form [1]) fügen will; die Ueberschriften der Paragraphen werden den allgemeinen Fortschritt des Gedanken's angeben. Ich habe zum Schlusse eine Reihe von Noten zugefügt, in welchen ich entweder, wo es im Interesse der allgemeinen Auseinandersetzung des Textes nützlich schien, besondere Punkte weiter entwickelt habe, oder in denen ich bemüht war, den abstract mathematischen Standpunkt, der für die Betrachtungen des Textes massgebend ist, gegen verwandte abzugränzen.

§. 1.

Gruppen von räumlichen Transformationen. Hauptgruppe. Aufstellung eines allgemeinen Problems.

Der wesentlichste Begriff, der bei den folgenden Auseinandersetzungen nothwendig ist, ist der einer G r u p p e von räumlichen Aenderungen.

Beliebig viele Transformationen des Raumes [2]) ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, dass jede Aenderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine T r a n s f o r m a t i o n s g r u p p e [3]) genannt werden.

---

1) Diese knappe Form ist ein Mangel der im Folgenden gegebenen Darstellung, der das Verständniss, wie ich fürchte, wesentlich erschweren wird. Aber dem hätte wohl nur durch eine sehr viel weitere Auseinandersetzung abgeholfen werden können, in der die Einzel-Theorien, die hier nur berührt werden, ausführlich entwickelt worden wären.

2) Wir denken von den Transformationen immer die Gesammtheit der räumlichen Gebilde gleichzeitig betroffen und reden desshalb schlechthin von Transformationen des Raumes. Die Transformationen können, wie z. B. die dualistischen, statt der Puncte andere Elemente einführen; es wird dies im Texte nicht unterschieden.

3) Begriffsbildung wie Bezeichnung sind herübergenommen von der S u b s t i t u t i o n s t h e o r i e, in der nur an Stelle der Transformationen eines continuirlichen Gebietes die Vertauschungen einer endlichen Zahl discreter Grössen auftreten.

Ein Beispiel für eine Transformationsgruppe bildet die Gesammtheit der Bewegungen (jede Bewegung als eine auf den ganzen Raum ausgeführte Operation betrachtet). Eine in ihr enthaltene Gruppe bilden etwa die Rotationen um einen Punct[1]). Eine Gruppe, welche umgekehrt die Gruppe der Bewegungen umfasst, wird durch die Gesammtheit der Collineationen vorgestellt. Die Gesammtheit der dualistischen Umformungen bildet dagegen keine Gruppe — denn zwei dualistische Umformungen ergeben zusammen wieder eine Collineation —, wohl aber wird wieder eine Gruppe erzeugt, wenn man die Gesammtheit der dualistischen mit der Gesammtheit der collinearen zusammenfügt[2]).

Es gibt nun räumliche Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften räumlicher Gebilde überhaupt ungeändert lassen. Geometrische Eigenschaften sind nämlich ihrem Begriffe nach unabhängig von der Lage, die das zu untersuchende Gebilde im Raume einnimmt, von seiner absoluten Grösse, endlich auch von dem Sinne[3]), in welchem seine Theile geordnet sind. Die Eigenschaften eines räumlichen Gebildes bleiben also ungeändert durch alle Bewegungen des Raumes, durch seine Aehnlichkeitstransformationen, durch den Process der Spiegelung, sowie durch alle Transformationen, die sich aus diesen zusammensetzen. Den Inbegriff aller dieser Transformationen bezeichnen wir als die Hauptgruppe[4]) räumlicher Aenderungen; geometrische Eigenschaften werden durch die

1) Camille Jordan hat alle Gruppen aufgestellt, die überhaupt in der Gruppe der Bewegungen enthalten sind: Sur les groupes de mouvements. Annali di Matematica. t. II.

2) Die Transformationen einer Gruppe brauchen übrigens durchaus nicht, wie das bei den im Texte zu nennenden Gruppen allerdings immer der Fall sein wird, in stetiger Aufeinanderfolge vorhanden zu sein. Eine Gruppe bildet z. B. auch die endliche Reihe von Bewegungen, die einen regelmässigen Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, oder die unendliche, aber discrete Reihe, welche eine Sinuslinie sich selber superponiren.

3) Unter dem Sinne verstehe ich hier die Eigenschaft der Anordnung, welche den Unterschied von der symmetrischen Figur (dem Spiegelbilde) begründet. Ihrem Sinne nach unterschieden sind also z. B. eine rechts- und eine linksgewundene Schraubenlinie.

4) Dass diese Transformationen eine Gruppe bilden, ist begrifflich nothwendig.

Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert. Auch umgekehrt kann man sagen: Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber den Transformationen der Hauptgruppe characterisirt. Betrachtet man nämlich den Raum einen Augenblick als unbeweglich etc., als eine starre Mannigfaltigkeit, so hat jede Figur ein individuelles Interesse; von den Eigenschaften, die sie als Individuum hat, sind es nur die eigentlich geometrischen, welche bei den Aenderungen der Hauptgruppe erhalten bleiben. Dieser hier etwas unbestimmt formulirte Gedanke wird im weiteren Verlaufe der Auseinandersetzung deutlicher erscheinen.

Streifen wird jetzt das mathematisch unwesentliche sinnliche Bild ab, und erblicken im Raume nur eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, also, indem wir an der gewohnten Vorstellung des Punctes als Raumelement festhalten, eine dreifach ausgedehnte. Nach Analogie mit den räumlichen Transformationen reden wir von Transformationen der Mannigfaltigkeit; auch sie bilden Gruppen. Nur ist nicht mehr, wie im Raume, eine Gruppe vor den übrigen durch ihre Bedeutung ausgezeichnet; jede Gruppe ist mit jeder anderen gleichberechtigt. Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

In Anlehnung an die moderne Ausdrucksweise, die man freilich nur auf eine bestimmte Gruppe, die Gruppe aller linearen Umformungen, zu beziehen pflegt, mag man auch so sagen:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.

Dies ist das allgemeine Problem, welches die gewöhnliche Geometrie nicht nur, sondern namentlich auch die hier zu nennenden neueren geometrischen Methoden und die verschiedenen Behandlungsweisen beliebig ausgedehnter Mannigfaltigkeiten unter sich begreift. Was besonders betont sein mag, ist die Willkürlichkeit, die hinsichtlich der Wahl der zu adjungirenden Transformationsgruppe besteht, und die daraus fliessende und in diesem Sinne zu verstehende gleiche Berechtigung aller sich unter die allgemeine Forderung subsumirenden Betrachtungsweisen.

§. 2.

Transformationsgruppen, von denen die eine die andere umfasst, werden nach einander adjungirt. Die verschiedenen Typen geometrischer Forschung und ihr gegenseitiges Verhältniss.

Da die geometrischen Eigenschaften räumlicher Dinge durch alle Transformationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben, so ist es an und für sich absurd, nach solchen Eigenschaften derselben zu fragen, bei denen dies nur gegenüber einem Theile dieser Transformationen der Fall ist. Diese Fragestellung wird indess berechtigt, ob auch nur formal, wenn wir die räumlichen Gebilde in ihrer Beziehung zu fest gedachten Elementen untersuchen. Betrachten wir z. B., wie in der sphärischen Trigonometrie, die räumlichen Dinge unter Auszeichnung eines Punctes. Dann ist zunächst die Forderung: die unter Adjunction der Hauptgruppe invarianten Eigenschaften nicht mehr der räumlichen Dinge an sich sondern des von ihnen mit dem gegebenen Puncte gebildeten System's zu entwickeln. Aber dieser Forderung können wir die andere Form ertheilen: Man untersuche die räumlichen Gebilde an sich hinsichtlich solcher Eigenschaften, welche ungeändert bleiben durch diejenigen Transformationen der Hauptgruppe, welche noch stattfinden können, wenn wir den Punct fest halten. Mit anderen Worten: Es ist dasselbe, ob wir die räumlichen Gebilde im Sinne der Hauptgruppe untersuchen und ihnen den gegebenen Punct hinzufügen, oder ob wir, ohne ihnen irgend ein Gegebenes hinzuzufügen, die Hauptgruppe durch die in ihr enthaltene Gruppe ersetzen, deren Transformationen den bez. Punct ungeändert lassen.

Es ist dies ein in der Folge häufig angewandtes Princip, das wir desshalb gleich hier allgemein formuliren wollen; etwa in der folgenden Weise:

Es sei eine Mannigfaltigkeit und zu ihrer Behandlung eine auf sie bezügliche Transformationsgruppe gegeben. Es werde das Problem vorgelegt, die in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde hinsichtlich eines gegebenen Gebildes zu untersuchen. So kann man entweder dem Systeme der Gebilde das gegebene hinzufügen, und es fragt sich dann nach den Eigenschaften des erweiterten System's im Sinne der gegebenen Gruppe — oder, man lasse das System unerweitert, beschränke aber die Transformationen, die man bei der Behandlung zu Grunde legt, auf diejenigen in der gegebenen Gruppe enthaltenen, welche das gegebene Gebilde ungeändert lassen (und die nothwendig wieder eine Gruppe bilden). —

Im Gegensatze zu der zu Anfang des Paragraphen aufgeworfenen Frage beschäftige uns nun die umgekehrte, die von Vornherein verständlich ist. Wir fragen nach denjenigen Eigenschaften räumlicher Dinge, welche bei einer Transformationsgruppe erhalten bleiben, die die Hauptgruppe als einen Theil umfasst. Jede Eigenschaft, die wir bei einer solchen Untersuchung finden, ist eine geometrische Eigenschaft des Ding's an sich, aber das Umgekehrte gilt nicht. Bei der Umkehr tritt vielmehr das eben vorgetragene Princip in Kraft, wobei die Hauptgruppe nun die kleinere Gruppe ist. Wir erhalten so:

Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere Gruppe, so bleibt nur ein Theil der geometrischen Eigenschaften erhalten. Die übrigen erscheinen nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Eigenschaften des System's, welches hervorgeht, wenn man denselben ein ausgezeichnetes Gebilde hinzufügt. Dieses ausgezeichnete Gebilde ist (soweit es überhaupt ein bestimmtes[1]) ist) dadurch definirt, dass es, fest gedacht, dem Raume unter den Transformationen der gegebenen Gruppe nur noch die Transformationen der Hauptgruppe gestattet.

In diesem Satze beruht die Eigenart der hier zu besprechenden neueren geometrischen Richtungen und ihr Verhältniss zur elementaren Methode. Sie sind dadurch eben zu characterisiren, dass sie an Stelle der Hauptgruppe eine erweiterte Gruppe räumlicher Umformungen der Betrachtung zu Grunde legen. Ihr gegenseitiges Verhältniss ist, sofern sich ihre Gruppen einschliessen, durch einen entsprechenden Satz bestimmt. Dasselbe gilt von den verschiedenen hier zu betrachtenden Behandlungsweisen mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten. Es soll dies nun an den einzelnen Methoden gezeigt werden, wobei denn die Sätze, die in diesem und dem vorigen Paragraphen allgemein hingestellt wurden, ihre Erläuterung an concreten Gegenständen finden.

§. 3.

Die projectivische Geometrie.

Jede räumliche Umformung, die nicht gerade der Hauptgruppe angehört, kann dazu benutzt werden, um Eigenschaften bekannter Gebilde auf neue Gebilde zu übertragen. So verwerthen wir die Geometrie der Ebene für die Geometrie der Flächen, die sich auf die Ebene abbilden lassen; so schloss man schon lange vor dem Entstehen einer eigentlichen projectivischen Geometrie von den Eigenschaften einer gegebenen Figur auf Eigenschaften anderer, die durch Projection aus ihr hervorgingen. Aber die projectivische Geometrie erwuchs erst, als man sich

---

1) Man erzeugt ein solches Gebilde beispielsweise, indem man auf ein beliebiges Anfangselement, das durch keine Transformation der gegebenen Gruppe in sich selbst überzuführen ist, die Transformationen der Hauptgruppe anwendet.

gewöhnte, die ursprüngliche Figur mit allen aus ihr projectivisch ableitbaren als wesentlich identisch zu erachten und die Eigenschaften, welche sich beim Projiciren übertragen, so auszusprechen, dass ihre Unabhängigkeit von der mit dem Projiciren verknüpften Aenderung in Evidenz tritt. Hiermit war denn der Behandlung im Sinne von §. 1 die Gruppe aller projectivischen Umformungen zu Grunde gelegt und dadurch eben der Gegensatz zwischen projectivischer und gewöhnlicher Geometrie geschaffen.

Ein ähnlicher Entwicklungsgang, wie der hier geschilderte, kann bei jeder Art von räumlicher Transformation als möglich gedacht werden; wir werden noch öfter darauf zurückkommen. Er hat sich innerhalb der projectivischen Geometrie selbst noch nach zwei Seiten vollzogen. Die eine Weiterbildung der Auffassung geschah durch Aufnahme der dualistischen Umformungen in die Gruppe der zu Grunde gelegten Aenderungen. Für den heutigen Standpunct sind zwei einander dualistisch entgegenstehende Figuren nicht mehr als zwei unterschiedene sondern als wesentlich dieselben Figuren anzusehen. Ein anderer Schritt bestand in der Erweiterung der zu Grunde gelegten Gruppe collinearer und dualistischer Umformungen durch Aufnahme der bez. imaginären Transformationen. Dieser Schritt bedingt, dass man vorher den Kreis der eigentlichen Raumelemente durch Hinzunahme der imaginären erweitert habe — ganz dem entsprechend, wie die Aufnahme der dualistischen Umformungen in die zu Grunde gelegte Gruppe die gleichzeitige Einführung von Punct und Ebene als Raumelement nach sich zieht. Es ist hier nicht der Ort, auf die Zweckmässigkeit der Einführung imaginärer Elemente zu verweisen, durch welche allein der genaue Anschluss der Raumlehre an das einmal gewählte Gebiet algebraischer Operationen erreicht wird. Dagegen muss betont werden, dass der Grund für die Einführung eben in der Betrachtung algebraischer Operationen, nicht aber in der Gruppe der projectivischen und dualistischen Umformungen liegt. So gut wir uns bei den letzteren auf reelle Transformationen beschränken können, da schon die reellen Collineationen und dualistischen Transformationen eine Gruppe bilden; — so gut können wir imaginäre Raumelemente einführen, auch wenn wir nicht auf projektivischem Standpuncte stehen, und sollen es, sofern wir principiell algebraische Gebilde untersuchen.

Wie man vom projectivischem Standpuncte aus die metrischen Eigenschaften aufzufassen hat, bestimmt sich nach dem allgemeinen Satze des vorangehenden Paragraphen. Die metrischen Eigenschaften sind als projectivische Beziehungen zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise [1], zu betrachten, einem Gebilde, das die Eigenschaft hat, nur durch diejenigen Transformationen der projectivischen Gruppe, die eben auch Transformationen der Hauptgruppe sind, in sich überzugehen. Der so schlechthin ausgesprochene Satz bedarf noch einer wesentlichen Ergänzung, die der Beschränkung der gewöhnlichen Anschauungsweise auf reelle Raumelemente (und reelle Transformationen) entspricht. Man muss dem Kugelkreise, um diesem Standpuncte gerecht zu werden, noch das System der rellen Raumelemente (Puncte) ausdrücklich hinzufügen; Eigenschaften im Sinne der elementaren Geometrie sind projectivisch entweder Eigenschaften der Dinge an sich oder Beziehungen zu diesem Systeme der reellen Elemente, oder zum Kugelkreise oder endlich zu beiden.

Es mag hier noch der Art gedacht werden, wie v. Staudt in seiner Geometrie der Lage die projectivische Geometrie aufbaut — d. h. diejenige projectivische Geometrie, welche sich auf Zugrundelegung der Gruppe aller reeller projectivisch-dualistischer Umformung beschränkt [2].

Es ist bekannt, wie er dabei aus dem gewöhnlichen

---

1) Diese Anschauungsweise ist als eine der schönsten Leistungen von Chasles zu betrachten; durch sie erst gewinnt die Eintheilung in Eigenschaften der Lage und Eigenschaften des Masses, wie man sie gern an die Spitze der projectivischen Geometrie stellt, einen präcisen Inhalt.

2) Den erweiterten Kreis, der auch imaginäre Umformungen umspannt, hat v. Staudt erst in den „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ zu Grunde gelegt.

Anschauungsmaterial nur solche Momente herausgreift, die auch bei projectivischen Umformungen erhalten bleiben. Wollte man weiterhin zur Betrachtung auch metrischer Eigenschaften übergehen, so hätte man die letzteren geradezu als Beziehungen zum Kugelkreise einzuführen. Der so vervollständigte Gedankengang ist für die hier vorliegenden Betrachtungen insofern von grosser Bedeutung, als ein entsprechender Aufbau der Geometrie im Sinne jeder einzelnen der noch anzuführenden Methoden möglich ist.

§. 4.

Uebertragung durch Abbildung.

Ehe wir in der Besprechung der geometrischen Methoden, die sich neben die elementare und die projectivische Geometrie stellen, weiter gehen, mögen allgemein einige Betrachtungen entwickelt werden, die im Folgenden immer wieder vorkommen und zu denen die bisher berührten Dinge bereits hinreichend viele Beispiele liefern. Auf diese Erörterungen bezieht sich der gegenwärtige und der nächstfolgende Paragraph.

Gesetzt, man habe eine Mannigfaltigkeit A unter Zugrundelegung einer Gruppe B untersucht. Führt man sodann A durch irgendwelche Transformation in eine andere Mannigfaltigkeit A′ über, so wird aus der Gruppe B von Aenderungen, die A in sich transformirten, nunmehr eine Gruppe B′, deren Transformationen sich auf A′ beziehen. Dann ist es ein selbstverständliches Princip, dass die Behandlungsweise von A unter Zugrundelegung von B die Behandlungsweise von A′ unter Zugrundelegung von B′ ergibt, d. h. jede Eigenschaft, welche ein in A enthaltenes Gebilde mit Bezug auf die Gruppe B hat, ergibt eine Eigenschaft des entsprechenden Gebildes in A′ mit Bezug auf die Gruppe B′.

Lassen wir z. B. A eine gerade Linie, B die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen bedeuten, welche dieselbe in sich überführen. Die Behandlungsweise von A ist dann eben diejenige, welche die neuere Algebra als

Theorie der binären Formen bezeichnet. Nun kann man die gerade Linie auf einen Kegelschnitt A' der Ebene durch Projection von einem Puncte des letzteren aus beziehen. Aus den linearen Transformationen B der Geraden in sich selbst werden dann die linearen Transformationen B' des Kegelschnittes in sich selbst, wie man leicht zeigt, d. h. diejenigen Aenderungen des Kegelschnittes, welche mit den linearen Transformationen der Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführen, verknüpft sind.

Es ist nun aber nach dem Princip des zweiten Paragraphen [1]) dasselbe: nach der Geometrie auf einem Kegelschnitte zu fragen, wenn man sich den Kegelschnitt als fest denkt und nur auf diejenigen linearen Transformationen der Ebene achtet, welche ihn in sich überführen, oder die Geometrie auf dem Kegelschnitte zu studiren, indem man überhaupt die linearen Transformationen der Ebene betrachtet und sich den Kegelschnitt mit ändern lässt. Die Eigenschaften, welche wir an den Punctsystemen auf dem Kegelschnitte auffassten, sind mithin im gewöhnlichen Sinne projectivische. Die Verknüpfung der letzten Ueberlegung mit dem eben abgeleiteten Resultate gibt also:

Binäre Formentheorie und projectivische Geometrie der Punctsysteme auf einem Kegelschnitte ist dasselbe, d. h. jedem binären Satze entspricht ein Satz über derartige Punctsysteme und umgekehrt [2]).

Ein anderes Beispiel, welches geeignet ist, diese Art von Betrachtungen zu veranschaulichen, ist das folgende: Wenn man eine Fläche zweiten Grades mit einer Ebene durch stereographische Projection in Verbindung setzt, so tritt auf der Fläche ein Fundamentalpunct auf: der Projectionspunct, in der Ebene sind es zwei: die Bilder der durch den Projectionspunct gehenden Erzeugenden. Man

1) Wenn man will, ist hier das Princip unter etwas erweiterter Form angewendet.

2) Statt des Kegelschnittes in der Ebene kann man mit gleichem Erfolge eine Raumcurve dritter Ordnung einführen, überhaupt bei n Dimensionen etwas Entsprechendes aufstellen.

zeigt nun ohne Weiteres: Die linearen Transformationen der Ebene, welche die beiden Fundamentalpuncte derselben ungeändert lassen, gehen durch die Abbildung in lineare Transformationen der Fläche zweiten Grades in sich selbst über, aber nur in diejenigen, welche den Projectionspunct ungeändert lassen. Unter linearen Transformationen der Fläche in sich selbst sind dabei diejenigen Aenderungen verstanden, welche die Fläche erfährt, wenn man lineare Raumtransformationen ausführt, welche die Fläche mit sich selbst zur Deckung bringen. Hiernach wird also die projectivische Untersuchung einer Ebene unter Zugrundelegung zweier Puncte und die projectivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Zugrundelegung eines Punctes identisch. Die erstere ist nun — sofern man imaginäre Elemente mit in Betracht zieht — nichts Anderes, als die Untersuchung der Ebene im Sinne der elementaren Geometrie. Denn die Hauptgruppe der ebenen Transformationen besteht eben in den linearen Umformungen, welche ein Punctepaar (die unendlich fernen Kreispuncte) ungeändert lassen. Wir erhalten also schliesslich:

Die elementare Geometrie der Ebene und die projectivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Hinzunahme eines ihrer Puncte sind dasselbe.

Diese Beispiele liessen sich beliebig vervielfachen [1]); die beiden hier entwickelten sind gewählt worden, da wir in der Folge noch Gelegenheit haben werden, auf dieselben zurückzukommen.

---

1) Bez. anderer Beispiele, sowie namentlich der Erweiterungen auf mehr Dimensionen, deren die angeführten fähig sind, verweise ich auf bez. Auseinandersetzungen in einem Aufsatze von mir: Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen, t. V, 2, sowie auf die sogleich noch zu nennenden Lie'schen Arbeiten.

§. 5.

Von der Willkürlichkeit in der Wahl des Raumelements. Das Hesse'sche Uebertragungsprincip. Die Liniengeometrie.

Als Element der geraden Linie, der Ebene, des Raumes, überhaupt einer zu untersuchenden Mannigfaltigkeit kann statt des Punctes jedes in der Mannigfaltigkeit enthaltene Gebilde: die Punctgruppe, ev. die Curve, die Fläche u. s. w. verwandt werden[1]). Indem über die Zahl willkürlicher Parameter, von denen man diese Gebilde abhängig setzen will, von Vornherein gar Nichts fest steht, erscheinen Linie, Ebene, Raum etc. je nach der Wahl des Elementes mit beliebig vielen Dimensionen behaftet. Aber so lange wir der geometrischen Untersuchung dieselbe Gruppe von Aenderungen zu Grunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert, das heisst, jeder Satz, der bei einer Annahme des Raumelements sich ergab, ist auch ein Satz bei beliebiger anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert.

Das Wesentliche ist also die Transformationsgruppe; die Zahl der Dimensionen, die wir einer Mannigfaltigkeit beilegen wollen, erscheint als etwas Secundäres.

Die Verknüpfung dieser Bemerkung mit dem Princip des vorigen Paragraphen ergibt eine Reihe schöner Anwendungen, von denen hier einige entwickelt werden mögen, da diese Beispiele mehr als alle lange Auseinandersetzung geeignet scheinen, den Sinn der allgemeinen Betrachtung darzulegen.

Die projectivische Geometrie auf der Geraden (die Theorie der binären Formen) ist nach dem vorigen Paragraphen mit der projectivischen Geometrie auf dem Kegelschnitte gleichbedeutend. Auf letzterem mögen wir jetzt statt des Punctes das Punctepaar als Element betrachten.

---

1) Vergl. Note III.

Die Gesammtheit der Punctepaare des Kegelschnitts lässt sich aber auf die Gesammtheit der Geraden der Ebene beziehen, indem man jede Gerade dem Punctepaare zuordnet, in welchem sie den Kegelschnitt trifft. Bei dieser Abbildung gehen die linearen Transformationen des Kegelschnitts in sich selbst in die linearen Transformationen der (aus Geraden bestehend gedachten) Ebene über, welche den Kegelschnitt ungeändert lassen. Ob wir aber die aus den letzteren bestehende Gruppe betrachten, oder die Gesammtheit der linearen Transformationen der Ebene zu Grunde legen und den zu untersuchenden Gebilden der Ebene den Kegelschnitt allemal hinzufügen, ist nach §. 2 gleichbedeutend. Indem wir alle diese Ueberlegungen zusammen nehmen, haben wir:

Die Theorie der binären Formen und die projectivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes sind gleichbedeutend.

Da endlich projectivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes eben wegen der Gleichheit der Gruppe mit der projectivischen Massgeometrie coïncidirt, die man in der Ebene auf einen Kegelschnitt gründen kann [1]), so mögen wir auch so sagen:

Die Theorie der binären Formen und die allgemeine projectivische Massgeometrie in der Ebene sind dasselbe.

Statt des Kegelschnitts in der Ebene können wir in der vorstehenden Betrachtung die Curve dritter Ordnung im Raume setzen etc., doch mag dies unausgeführt bleiben. Der hier dargelegte Zusammenhang zwischen der Geometrie der Ebene, weiterhin des Raumes oder einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit deckt sich im Wesentlichen mit dem von Hesse vorgeschlagenen Uebertragungsprincipe (Borchardt's Journal Bd. 66).

Ein Beispiel ganz ähnlicher Art ergibt die projectivische Geometrie des Raumes, oder, anders ausgedrückt, die Theo-

1) Vergl. Note V.

rie der quaternären Formen. Fasst man die gerade Linie als Raumelement und ertheilt ihr, wie in der Liniengeometrie geschieht, sechs homogene Coordinaten, zwischen denen eine Bedingungsgleichung vom zweiten Grade Statt findet, so erscheinen die linearen und dualistischen Transformationen des Raumes als diejenigen linearen Transformationen der unabhängig gedachten sechs Veränderlichen, welche die Bedingungsgleichung in sich überführen. Durch eine Verknüpfung ähnlicher Ueberlegungen, wie sie soeben entwickelt wurden, erhält man hieraus den Satz:

Die Theorie der quaternären Formen deckt sich mit der projectivischen Massbestimmung in einer durch 6 homogene Veränderliche erzeugten Mannigfaltigkeit.

Wegen der näheren Ausführung dieser Auffassung verweise ich auf einen demnächst in den Math. Annalen (Bd. VI) erscheinenden Aufsatz: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", sowie auf eine Note am Schlusse dieser Mittheilung [1]).

Ich knüpfe an die vorstehenden Auseinandersetzungen noch zwei Bemerkungen, von denen die erste zwar schon implicite in dem Bisherigen enthalten ist, aber ausgeführt werden soll, weil der Gegenstand, auf den sie sich bezieht, zu leicht Missverständnissen ausgesetzt ist.

Wenn wir beliebige Gebilde als Raumelemente einführen, so erhält der Raum beliebig viele Dimensionen. Wenn wir dann aber an der uns geläufigen (elementaren oder projectivischen) Anschauungsweise festhalten, so ist die Gruppe, welche wir für die mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen haben, von Vorne herein gegeben; es ist eben die Hauptgruppe bez. die Gruppe der projectivischen Umformungen. Wollten wir eine andere Gruppe zu Grunde legen, so müssten wir von der gewöhnlichen bez. der projectivischen Anschauung abgehen. So richtig es also ist, dass bei geschickter Wahl der Raumelemente der Raum Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen

1) Vergl. Note VI.

Ausdehnungen repräsentirt, so wichtig ist es, hinzuzufügen, dass bei dieser Repräsentation entweder von Vorneherein eine bestimmte Gruppe der Behandlung der Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen ist, oder dass wir, wollen wir über die Gruppe verfügen, unsere geometrische Auffassung entsprechend auszubilden haben. — Es könnte, ohne diese Bemerkung, z. B. eine Repräsentation der Liniengeometrie in der folgenden Weise gesucht werden. Die Gerade erhält in der Liniengeometrie sechs Coordinaten; eben so viele Coëfficienten besitzt der Kegelschnitt in der Ebene. Das Bild der Liniengeometrie würde also die Geometrie in einem Kegelschnittsysteme sein, das aus der Gesammtheit der Kegelschnitte durch eine quadratische Gleichung zwischen den Coëfficienten ausgesondert wird. Das ist richtig, sowie wir als Gruppe der ebenen Geometrie die Gesammtheit der Transformationen zu Grunde legen, die durch lineare Umformungen der Kegelschnitts-Coëfficienten repräsentirt werden, welche die quadratische Bedingungsgleichung in sich überführen. Halten wir aber an der elementaren bez. der projectivischen Auffassung der ebenen Geometrie fest, so haben wir eben kein Bild.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf folgende Begriffsbildung. Sei im Raume irgend eine Gruppe, etwa die Hauptgruppe gegeben. So wähle man ein einzelnes räumliches Gebilde, etwa einen Punct, oder eine Gerade, oder auch ein Ellipsoid etc. aus und wende auf dasselbe alle Transformationen der Hauptgruppe an. Man erhält dann eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit mit einer Anzahl von Dimensionen, die im Allgemeinen gleich der Zahl der in der Gruppe enthaltenen willkürlichen Parameter ist, die in besonderen Fällen herabsinkt, wenn nämlich das ursprünglich gewählte Gebilde die Eigenschaft besitzt, durch unendlich viele Transformationen der Gruppe in sich übergeführt zu werden. Jede so erzeugte Mannigfaltigkeit heisse mit Bezug auf die erzeugende Gruppe ein Körper.[1])

---

1) Ich wähle den Namen nach dem Vorgange von Dedekind, der in der Zahlentheorie ein Zahlengebiet als Körper bezeichnet, wenn