Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. E. Leuzinger

Sommersemester 2010

Homogene und Symmetrische Räume

Übung 4

1. Aufgabe

Identifizieren Sie die Heisenberg-Gruppe $\mathrm{H}(3)$ als Mannigfaltigkeit mit $\mathbb{R}^3$, d.h. betrachten Sie den Diffeomorphismus

$$\varphi : \mathrm{H}(3) \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mittels des Differentials $d\varphi|_E$ werden dann die Tangentialräume $\mathrm{T}_E\mathrm{H}(3) \cong \mathfrak{h}(3)$ und $\mathrm{T}_0\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ identifiziert. Zeigen Sie, dass in dieser Schreibweise $A, B, C \in \mathfrak{h}(3)$ mit

$$A := \frac{\partial}{\partial x}, \quad B := \frac{\partial}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \quad C := \frac{\partial}{\partial z}$$

linksinvariante Vektorfelder auf $\mathrm{H}(3)$ sind. Berechnen Sie die Lie-Klammern $[A, B]$, $[A, C]$ und $[B, C]$.

2. Aufgabe

Für die Lie-Gruppen $G = \mathrm{SO}(n)$ bzw. $G = \mathrm{SU}(n)$ mit zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ definiert man die *Killing-Form*

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(XY)).$$

Zeigen Sie:

(a) B ist eine negativ definite Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

(b) B ist $\mathrm{Ad}(G)$-invariant, d.h. für alle $g \in G$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = B(X, Y).$$

Abgabe und Besprechung in der Übung am 27.5.2010.