Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. E. Leuzinger

Sommersemester 2010

Homogene und Symmetrische Räume

Übung 5

1. Aufgabe

Auf $\mathbb{R}^n$ sei folgende symmetrische Bilinearform gegeben:

$$Q(x, y) := -x_1 y_1 - \ldots - x_p y_p + x_{p+1} y_{p+1} + \ldots + x_n y_n.$$

Dann ist die (nicht-kompakte) Grassmann-Mannigfaltigkeit $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) := \{U \mid U \text{ ist } p\text{-dimensionaler Untervektorraum}, Q|_{U \times U} \text{ negativ definit}\}.$$

Die zu Q gehörende spezielle pseudo-orthogonale Gruppe ist

$$\mathrm{SO}(p, n-p) := \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \mid Q(Ax, Ay) = Q(x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zeigen Sie,

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{SO}(p, n-p)/(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(n-p))$$

Was ist die Dimension von $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$?

2. Aufgabe

Bestimmen Sie die Cartan-Involution und die Geodätischen für die Grassmann-Mannigfaltigkeiten

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(p, n-p)/(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(n-p))$$

in Analogie zum Fall $p = 1$ (hyperbolischer Raum H^n).

3. Aufgabe

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *lokal symmetrisch*, falls die geodätischen Spiegelungen s_p lokale Isometrien sind für alle $p \in V$. Sei D der Levi-Civita-Zusammenhang und R der Krümmungstensor von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Zeigen Sie: V ist lokal symmetrisch, genau dann wenn $D\mathrm{R} = 0$.

Abgabe und Besprechung in der Übung am 10.6.2010.