Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. E. Leuzinger

Sommersemester 2010

Homogene und Symmetrische Räume

Übung 6

1. Aufgabe

Es sei $M = G/K$ ein symmetrischer Raum vom kompakten oder nicht-kompakten Typ. Weiter sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G und θ die Cartan-Involution auf $\mathfrak{g}$ mit zugehöriger Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Es bezeichne $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$ die Komplexifizierung von $\mathfrak{g}$, und $\theta_{\mathbb{C}}$ die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von θ. Die Killing-Form $B_{\mathbb{C}}$ von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ist die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von B.

Die zu $\mathfrak{g}$ *duale* Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g}^*$ von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ definieren wir durch die Cartan-Zerlegung

$$\mathfrak{g}^* := \mathfrak{k} \oplus \mathrm{i}\mathfrak{p}.$$

Die Killing-Form von $\mathfrak{g}^*$ ist $B^* = B_{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*}$.

Zeigen Sie:

(a) $\theta^* := \theta_{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}^*}$ ist eine Cartan-Involution von $\mathfrak{g}^*$ (wobei $\mathfrak{k}^* = \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}^* = \mathrm{i}\mathfrak{p}$).

(b) Die Abbildung $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, $X + Y \mapsto X + \mathrm{i}Y$ (wobei $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$) ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Für die Einschränkungen der Killing-Formen gilt (mit $X_1, X_2 \in \mathfrak{k}$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{p}$):

$$B_{\mathfrak{k}}(X_1, X_2) = B^*_{\mathfrak{k}^*}(\delta(X_1), \delta(X_2)) \quad \text{und} \quad B_{\mathfrak{p}}(Y_1, Y_2) = -B^*_{\mathfrak{p}^*}(\delta(Y_1), \delta(Y_2)).$$

Ein symmetrischer Raum $M^* = G^*/K^*$ heißt *dual* zu G/K, wenn die Lie-Algebra von G^* isomorph zu $\mathfrak{g}^*$ ist und die Lie-Algebra von K^* isomorph zu $\mathfrak{k}^* = \mathfrak{k}$ ist.

Zeigen Sie:

(c) M ist genau dann vom kompakten Typ (bzw. nicht-kompakten Typ), wenn M^* vom nicht-kompakten Typ (bzw. kompakten Typ) ist. Insbesondere folgt, dass die Schnittkrümmung einer Ebene $P \subset \mathrm{T}_{x_0}M$, die von $X, Y \in \mathfrak{p}$ aufgespannt wird, das Negative der Schnittkrümmung der Ebene $P^* \subset \mathrm{T}_{x_0^*}M^*$ ist, die von $\delta(X), \delta(Y) \in \mathfrak{p}^*$ aufgespannt wird.

(d) Die Grassmann-Mannigfaltigkeiten

$$\mathrm{SO}(p+q)/(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)) \quad \text{und} \quad \mathrm{O}(p,q)^\circ/(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q))$$

sind duale symmetrische Räume.

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass für die Killing-Form B der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ gilt:

$$B(X, Y) = 2n \cdot \mathrm{Spur}(XY) \quad \text{für } X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}).$$

3. Aufgabe

Beweisen Sie, dass jede nicht-konstante Geodätische γ in einem symmetrischen Raum entweder injektiv oder periodisch ist.

Hinweis: Benutzen Sie Transvektionen entlang γ.

Abgabe und Besprechung in der Übung am 24.6.2010.