

Komplexe halbeinfache Lie-Algebren

Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Institut für Algebra und Geometrie
Arbeitsgruppe Differentialgeometrie
Karlsruher Institut für Technologie

Es sei \mathfrak{g} eine komplexe Lie-Algebra und $\dim \mathfrak{g} < \infty$.
Dann gilt

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r},$$

wobei

- \mathfrak{s} **halbeinfach** ist,
d.h. die Killing-Form von \mathfrak{s} ist nicht ausgeartet,
- \mathfrak{r} **auflösbar** ist,
d.h. die Killing-Form ist ausgeartet mit Radikal $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$.

Unterschiedliches Verhalten von **auflösbaren** und **halbeinfachen** Lie-Algebren:

- \mathfrak{g} **auflösbar**:

$$\mathfrak{g} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \supset \dots \supset \{0\}.$$

- \mathfrak{g} **halbeinfach**:

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \dots$$

Auflösbar:

- Abelsche Lie-Algebren, insbesondere Lie-Algebren von Diagonalmatrizen.
- Die Heisenberg-Algebra.
- Lie-Algebren von oberen Dreiecksmatrizen.

Halbeinfach:

- Die klassischen Lie-Algebren $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$.

Weder noch:

- $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ hat die Levi-Zerlegung

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}.$$

- Ein **Ideal** \mathfrak{h} in \mathfrak{g} ist eine Unteralgebra, die

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$$

erfüllt.

- Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt **einfach**, wenn sie keine Ideale (außer $\{0\}$ und \mathfrak{g} selbst) besitzt.
- **Cartan-Kriterium:**

Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} ist genau dann **halbeinfach**, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Idealen $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k$ ist:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k,$$

und $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ für $i \neq j$.

Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \operatorname{tr}(X) = 0\}$$

ist einfach.

An ihr lassen sich alle Struktureigenschaften einfacher Lie-Algebren demonstrieren.

Elementarmatrix:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}, \quad D_{ij} = E_{ii} - E_{jj}.$$

Zerlegung von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ lässt sich in spezielle Unteralgebren zerlegen:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-.$$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mid \sum \lambda_i = 0 \right\} = \langle D_{ij} \rangle,$$

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle E_{ij} \mid i < j \rangle,$$

$$\mathfrak{n}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle E_{ij} \mid i > j \rangle.$$

- Die abelsche Algebra \mathfrak{a} der Diagonalmatrizen mit Spur 0 ist die **Cartan-Unteralgebra** von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
- Für $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{a}$ gilt:

$$\text{ad}(D)E_{ij} = [D, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}.$$

- Also ist E_{ij} Eigenvektor von $\text{ad}(D)$ zum Eigenwert $\lambda_i - \lambda_j$. Außerdem liegt \mathfrak{a} im Eigenraum von $\text{ad}(D)$ zum Eigenwert 0.

Wurzelzerlegung (I)

- Definiere $\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}^*$ ($i \neq j$) durch

$$\alpha_{ij}(D) = \lambda_i - \lambda_j.$$

Die α_{ij} heißen **Wurzeln** von \mathfrak{a} .

- Eine Wurzel repräsentiert einen Satz von simultanen Eigenwerten für alle $\text{ad}(D)$, $D \in \mathfrak{a}$.
- Die Zerlegung $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ lässt sich zu einer **Zerlegung in simultane Eigenräume** für alle $D \in \mathfrak{a}$ verfeinern:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \text{ Wurzel}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Dies ist die **Wurzelzerlegung**.

- In der Wurzelzerlegung

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \text{ Wurzel}} \mathfrak{g}_\alpha$$

ist \mathfrak{g}_α der Raum

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid \text{ad}(D)X = \alpha(D)X \text{ für alle } D \in \mathfrak{a}\}.$$

- Außerdem gilt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid \text{ad}(D)X = 0 \text{ für alle } D \in \mathfrak{a}\},$$

da \mathfrak{a} maximal abelsch ist.

- Für jede Wurzel $\alpha = \alpha_{ij}$ gilt

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \langle E_{ij} \rangle.$$

Insbesondere $\dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$ für alle Wurzeln α .

- Es gilt

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}.$$

- **Folge:** Für alle Wurzeln α, β gilt:

$$[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

Dann ist entweder $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$, oder $\alpha + \beta$ ist ebenfalls Wurzel.

Wurzelzerlegung (III)

- Für jede Wurzel $\alpha = \alpha_{ij}$ existiert eine Wurzel $-\alpha = \alpha_{ji}$, und es gilt

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}.$$

Konkret:

$$[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj} = D_{ij} \in \mathfrak{a}.$$

- Die Menge R aller Wurzeln lässt sich nun zerlegen:

$$R = R^+ \cup R^-,$$

wobei

$$\alpha \in R^+ \Leftrightarrow -\alpha \in R^-.$$

- Die Wurzelzerlegung lässt sich weiter verfeinern:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$$

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist allgegenwärtig

- **Beobachtung:**

Für alle Wurzeln α und $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$,
 $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha] \in \mathfrak{a}$ gilt:

$$[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha, \quad [X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha.$$

Also:

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle H \rangle \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).$$

- **Folge:**

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ lässt als Summe von Kopien von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ schreiben:

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{s}_\alpha.$$

Im Allgemeinen ist diese Summe nicht direkt, denn

$H_{\alpha+\beta} = H_\alpha + H_\beta$, sofern $\alpha + \beta \in R$.

Es sei \mathfrak{g} eine beliebige komplexe halbeinfache Lie-Algebra.

- Die Ergebnisse über $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ lassen sich analog auf \mathfrak{g} übertragen.
- Insbesondere

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{s}_\alpha.$$

Wenn nun jedes \mathfrak{g} Summe von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Kopien ist, wodurch unterscheiden sich halbeinfache Lie-Algebren?

- Durch die Aktion der Cartan-Algebra \mathfrak{a} .
- Genauer: Durch die Struktur ihrer **Wurzelsysteme** R .

Es sei \mathfrak{g} eine beliebige komplexe halbeinfache Lie-Algebra.

- Die Ergebnisse über $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ lassen sich analog auf \mathfrak{g} übertragen.
- Insbesondere

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{s}_\alpha.$$

Wenn nun jedes \mathfrak{g} Summe von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Kopien ist, wodurch unterscheiden sich halbeinfache Lie-Algebren?

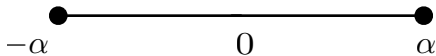
- Durch die Aktion der Cartan-Algebra \mathfrak{a} .
- Genauer: Durch die Struktur ihrer **Wurzelsysteme** R .

- Die Wurzeln erzeugen den Dualraum \mathfrak{a}^* von \mathfrak{a} .
- Da $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, sind die Wurzeln ganzzahlige Linearkombinationen einer Basis von \mathfrak{a}^* , die selbst aus Wurzeln besteht.
- **Folge:**
Wenn $\dim \mathfrak{a} = r$, so wird das Wurzelsystem von r Elementen erzeugt. Daher heißt r der **Rang** von R bzw. von \mathfrak{g} .
- Die **Killing-Form** induziert ein Skalarprodukt auf \mathfrak{a} und somit auf \mathfrak{a}^* . Dieses Skalarprodukt liefert geometrische Beschränkungen für die Struktur der Wurzelsysteme.
- Somit ist eine vollständige Klassifikation der Wurzelsysteme möglich.

Typ	\mathfrak{g}		$\dim \mathfrak{g}$
A_n	$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$	$n \geq 1$	$n^2 + 2n$
B_n	$\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C})$	$n \geq 2$	$2n^2 + n$
C_n	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$	$n \geq 3$	$2n^2 + n$
D_n	$\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C})$	$n \geq 4$	$2n^2 - n$
G_2		-	14
F_4		-	52
E_6		-	72
E_7		-	133
E_8		-	248

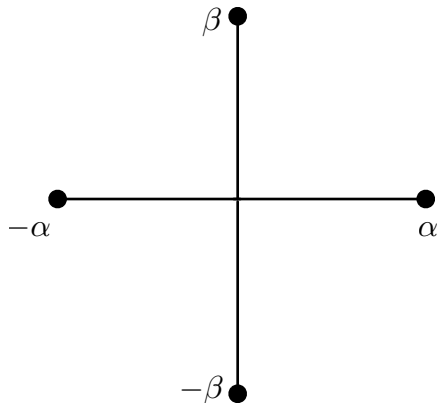
Außerdem: $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$ und $A_3 = D_3$.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ hat das Wurzelsystem A_1 :

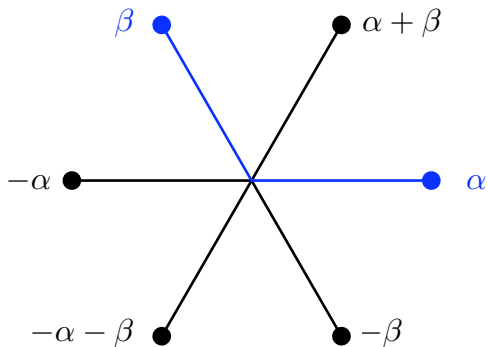


Wurzelsysteme: $A_1 \times A_1$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ hat das Wurzelsystem $A_1 \times A_1$:

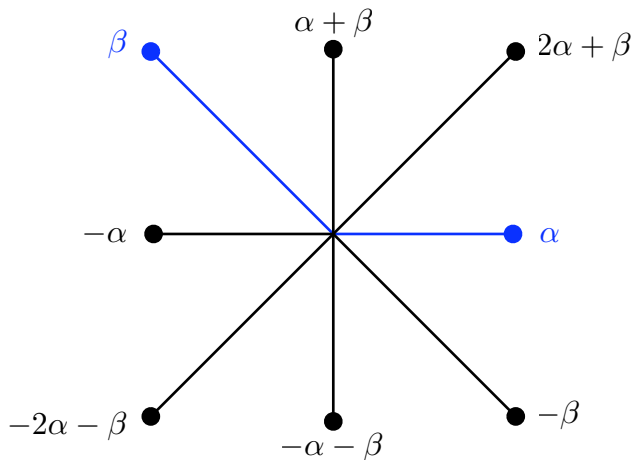


Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ hat das Wurzelsystem A_2 :



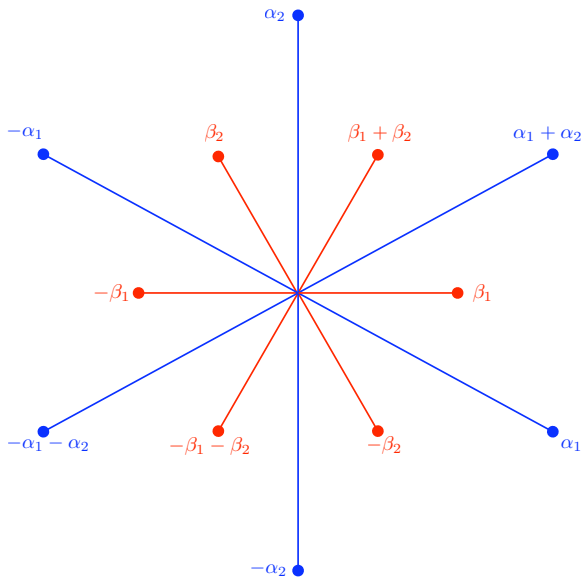
Wurzelsysteme: B_2

Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ hat das Wurzelsystem B_2 :



Wurzelsysteme: G_2

Die exotische Lie-Algebra \mathfrak{g}_2 hat das Wurzelsystem G_2 :



Aktion auf den Wurzelendiagrammen (I)

Erinnerung:

Für $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $H \in \mathfrak{a}$ gilt:

$$[H, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_\alpha, \quad [X_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\beta-\alpha}, \quad [X_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

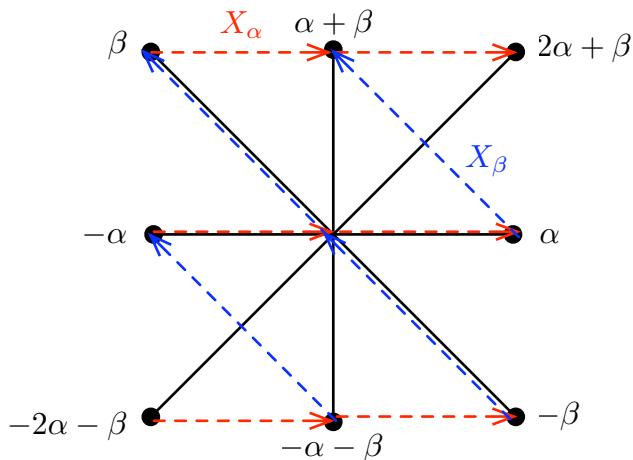
Das bedeutet:

- $H \in \mathfrak{a}$ fixiert die Eigenräume \mathfrak{g}_α und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$.
- X_α bewegt den Eigenraum \mathfrak{g}_β in den Eigenraum $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Dies lässt sich anhand der Wurzelendiagramme veranschaulichen.

Aktion auf den Wurzelendiagrammen (II)

Beispiel B_2 :



Aktion auf den Wurzel diagrammen (III)

- Wir haben gesehen, dass sich \mathfrak{g} aus Kopien von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ zusammensetzt.
- Auch die Aktion von \mathfrak{g} auf sich selbst (auf dem Wurzel diagramm) setzt sich aus Aktionen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ zusammen.
- Aktionen gegeben durch irreduzible **Darstellungen** von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad X \mapsto \rho(X).$$

Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (I)

- $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ wird erzeugt von H, X, Y mit den Relationen

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

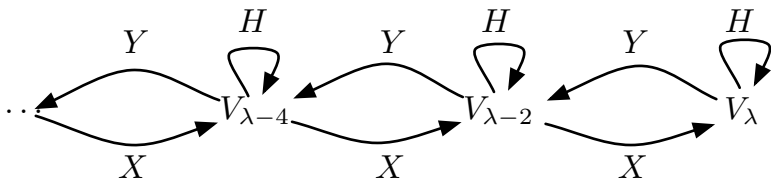
Das Element $\rho(H)$ ist diagonalisierbar.

- Ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von $\rho(H)$ zum Eigenwert λ , so gilt:

$$H.(X.v) = (\lambda + 2)X.v,$$

$$H.(Y.v) = (\lambda - 2)Y.v.$$

D.h. X (bzw. Y) bildet den Eigenraum V_λ auf den Eigenraum zu $V_{\lambda+2}$ (bzw. $V_{\lambda-2}$) ab.



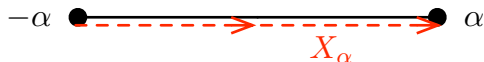
- Da \mathbb{C}^n endlich-dimensional ist, muss diese Kette irgendwann abbrechen.
- Es folgt, dass die **Eigenwerte** von H eine Folge von ganzen Zahlen bilden:

$$-n, -n+2, \dots, n-2, n.$$

Aktion auf den Wurzelendiagrammen (IV)

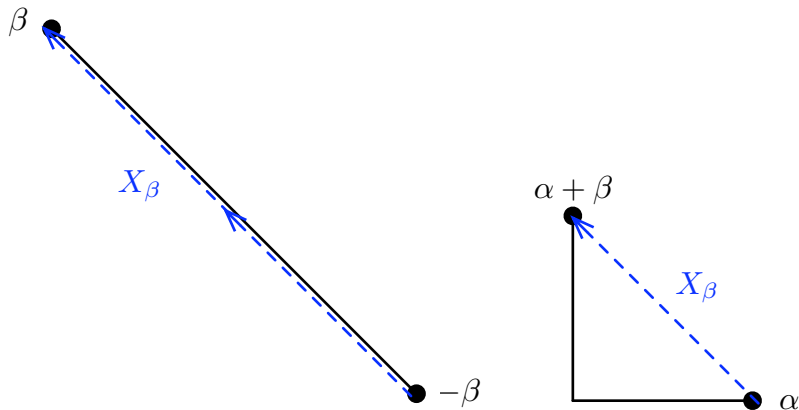
Zurück zum Beispiel B_2 .

Die α -Linie entspricht der adjungierten Darstellung
 $\text{ad} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \cong \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C}), X \mapsto \text{ad}(X)$.



Aktion auf den Wurzelendiagrammen (V)

Die β -Linien entsprechen einmal der adjungierten Darstellung und einmal der Standarddarstellung $\text{id} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}), X \mapsto X$.



Die Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren setzen sich aus den Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ zusammen.

- **Elementarteilchen** werden durch Elemente eines komplexen Hilbert-Raumes X beschrieben.
- Eine **physikalische Größe** O wird durch die Eigenwerte eines hermiteschen Operators \hat{O} auf X beschrieben.
- Zwei Größen O_1, O_2 sind gleichzeitig messbar, wenn der Kommutator

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$$

verschwindet.

Es sei nun $X \cong \mathbb{C}^3$ ein dreidimensionaler Hilbert-Raum mit Orthogonalbasis $\{u, d, s\}$, dem **Up-Quark**, **Down-Quark** und **Strange-Quark** bezeichnen.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ lässt sich schreiben als

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_3 \oplus i \cdot \mathfrak{su}_3.$$

- $i \cdot \mathfrak{su}_3$ sind die hermiteschen Operatoren auf X ,
- \mathfrak{su}_3 sind die infinitesimal-unitären Transformationen auf X .

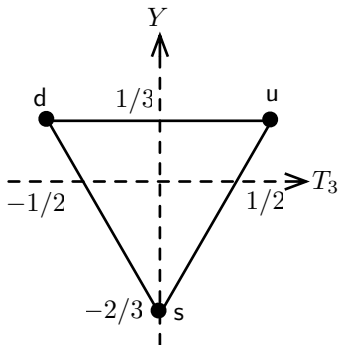
Die Cartan-Algebra von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ hat eine Basis

$$\hat{T}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

wobei T_3 die **z-Komponente des Isospins**
und Y die **Hyperladung** ist.

Quarks (III)

Da $[\hat{T}_3, \hat{Y}] = 0$, lassen sich die Quarks durch ihre Eigenwerte bezüglich \hat{T}_3 und \hat{Y} charakterisieren:



Wir betrachten drei Einbettungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$:

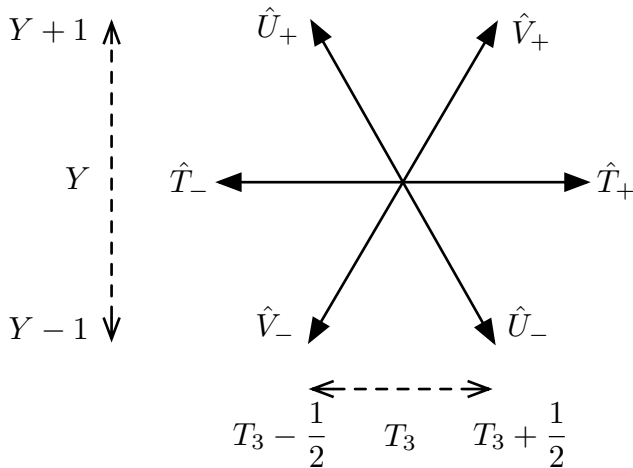
$$\hat{T}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{V}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aktion der Schiebeoperatoren

Die Operatoren \hat{T}_+ , \hat{T}_- , \hat{U}_+ , \hat{U}_- , \hat{V}_+ , \hat{V}_- operieren nach folgendem Schema in der T_3, Y -Ebene:



- In der Natur kommen keine vereinzelt Quarks vor, sondern nur aus Quarks und Antiquarks zusammengesetzte Teilchen.
- **Antiquarks** sind die Elemente des Dualraums X^* , auf dem $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ durch die duale Darstellung $A \mapsto -A^T$ operiert.
- Zusammengesetzte Teilchen entsprechen simultanen Eigenvektoren für irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Diese werden aus Tensorprodukten von X und X^* gewonnen.

Baryonen setzen sich aus drei Quarks zusammen.
Betrachte die Darstellung

$$\varrho_B : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(X \otimes X \otimes X),$$

gegeben durch

$$\varrho_B(A)(q_i \otimes q_j \otimes q_k) = Aq_i \otimes q_j \otimes q_k + q_i \otimes Aq_j \otimes q_k + q_i \otimes q_j \otimes Aq_k.$$

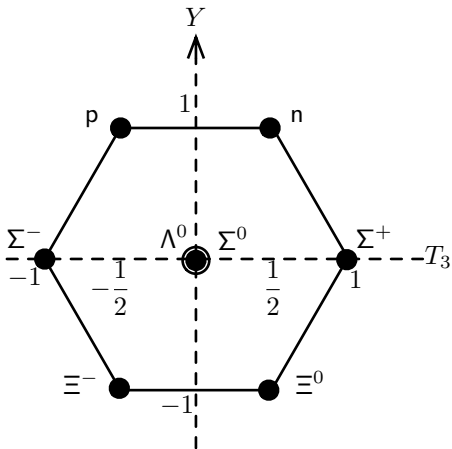
Dann:

$$X \otimes X \otimes X = B_1 \oplus B_8 \oplus B_8 \oplus B_{10},$$

wobei jedes B_k ein irreduzibler Modul (**Multiplett**) der Dimension k ist.

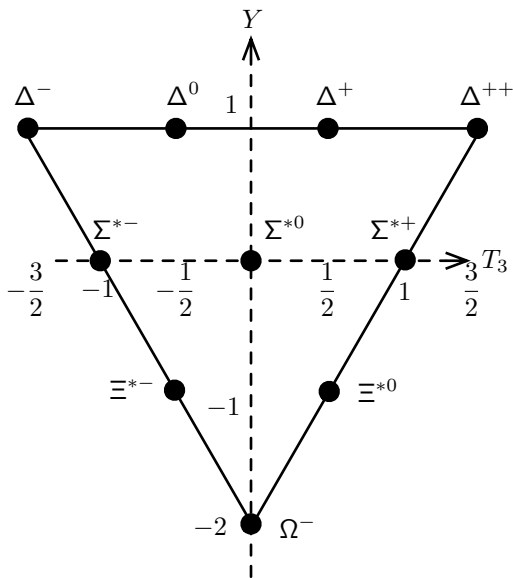
Baryonen (II)

Das Baryonen-Oktett B_8 :



Baryonen (III)

Das Baryonen-Dekuplett B_{10} :



Mesonen setzen sich aus einem Quark und einem Antiquark zusammen.

Betrachte die Darstellung

$$\varrho_M : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(X \otimes X^*),$$

gegeben durch

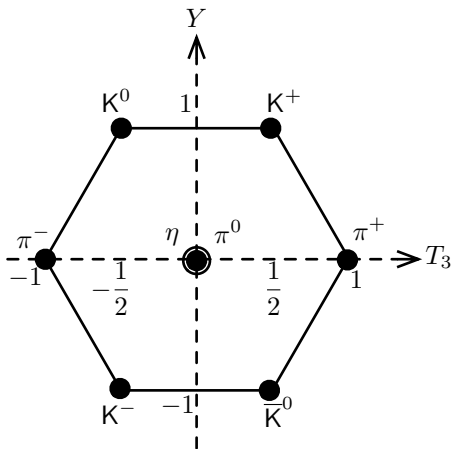
$$\varrho_M(A)(q_i \otimes q_j^*) = Aq_i \otimes q_j^* - q_i \otimes A^\top q_j^*.$$

Dann:

$$X \otimes X^* = M_1 \oplus M_8,$$

wobei M_8 eine irreduzibler Modul der Dimension 8 ist.

Das Mesonen-Oktett M_8 :





O. Baues, W. Globke

LIE GROUPS AND LIE ALGEBRAS

??? ???



W. Fulton, J. Harris

REPRESENTATION THEORY: A FIRST COURSE

Springer 1997



W. Greiner, B. Müller

QUANTENMECHANIK: SYMMETRIEN

Harri Deutsch 2005



B. Hall

LIE GROUPS, LIE ALGEBRAS, AND REPRESENTATIONS

Springer 2004



A. Knapp

LIE GROUPS BEYOND AN INTRODUCTION

Birkhäuser 2002