Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. E. Leuzinger

Sommersemester 2010

# Homogene und Symmetrische Räume

## Übung 1

### 1. Aufgabe

Untersuchen Sie die *Hopf-Faserung* der 3-dimensionalen Einheitssphäre

$$\mathrm{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Zeigen Sie dazu:

(a) Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathrm{S}^3 \to \mathrm{S}^3, \quad (t, (z_1, z_2)) \mapsto (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} z_1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} z_2)$$

ist eine Operation von $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathrm{S}^3$.

(b) Die Bahn eines Punktes $(z_1, z_2) \in \mathrm{S}^3$ ist isomorph zu einem Kreis

$$\mathrm{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

(c) Der Bahnenraum $\mathrm{S}^3/(\mathbb{R}, +)$ ist isomorph zu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Betrachten Sie dazu die *Hopf-Abbildung*

$$h : \mathrm{S}^3 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad (z_1, z_2) \mapsto \frac{z_1}{z_2}.$$

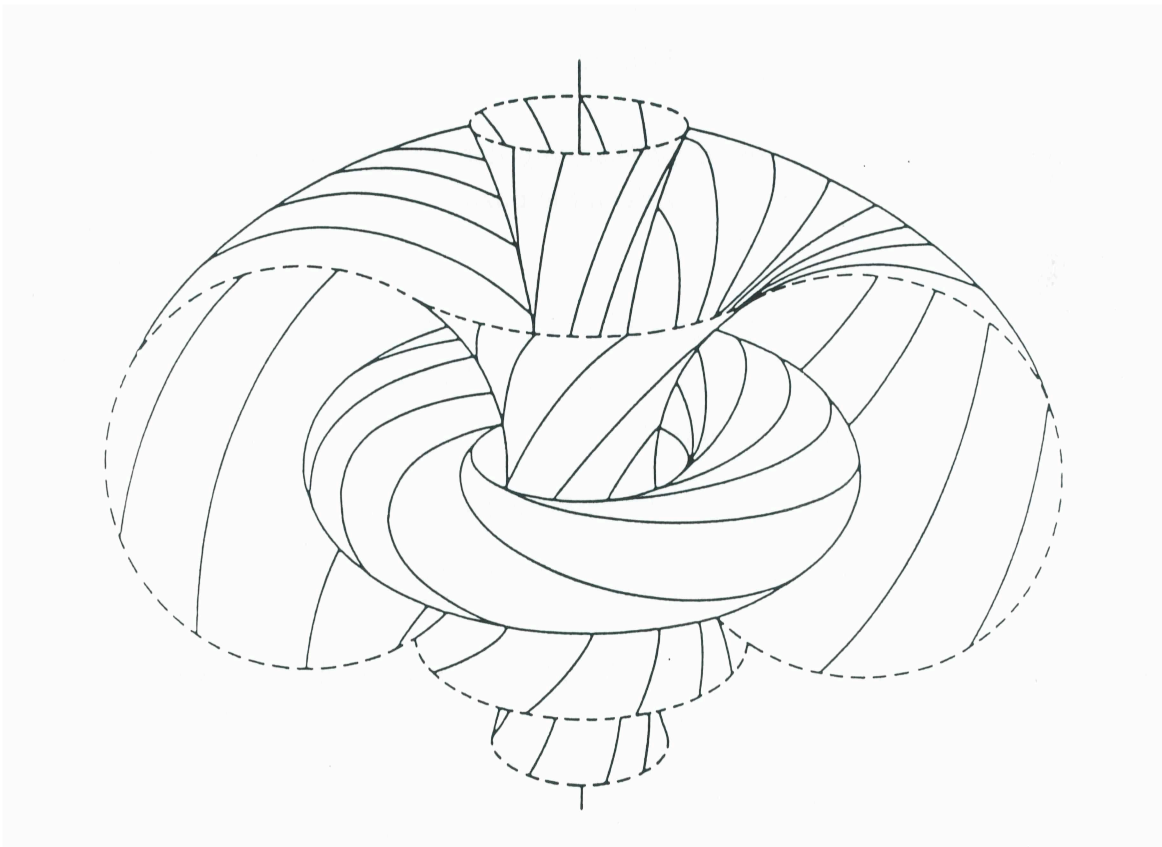
(d) Sei $0 < \lambda < \infty$. Wie kann man das Urbild $h^{-1}(S^1_\lambda) \subset \mathrm{S}^3$ von $S^1_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \lambda\}$ geometrisch beschreiben? Was erhält man für $\lambda = 0, \infty$? Wie sieht das Urbild eines Punktes aus?

(e) Die *stereographische Projektion* der $n$-dimensionalen Sphäre $\mathrm{S}^n$ ist definiert als

$$\pi_n : \mathrm{S}^n \backslash \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Die Abbildung auf der Rückseite zeigt Ausschnitte von $\pi_3(\mathrm{S}^3) \subset \mathbb{R}^3$. Welche Objekte sind eingezeichnet?

Abgabe und Besprechung in der Übung am 22.4.2010.



Aus: R. Penrose: The Geometry of the Universe (in L.A. Steen, mathematics today, 1978)