Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. E. Leuzinger

Homogene und Symmetrische Räume

Übung 2

1. Aufgabe

Zeigen Sie: Die hyperbolische Ebene $(\mathrm{H}^2, d_{\mathrm{hyp}})$ ist 2-*Punkt-homogen*, d.h. für je zwei Paare von Punkten $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ mit $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathrm{H}^2$ und $d_{\mathrm{hyp}}(p_1, q_1) = d_{\mathrm{hyp}}(p_2, q_2)$ gibt es eine Isometrie $\varphi : \mathrm{H}^2 \to \mathrm{H}^2$ mit $\varphi(p_1) = p_2$ und $\varphi(q_1) = q_2$.

2. Aufgabe

Die Menge aller k-dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^n$ bilden für $0 \leq k \leq n$ die sogenannte *Grassmann-Mannigfaltigkeit* $\mathrm{Gr}(k, n)$. Wie könnte man Karten definieren? Was ist die Dimension von $\mathrm{Gr}(k, n)$?

3. Aufgabe

Sei G eine Lie-Gruppe und $X, Y \in \mathfrak{V}G$ linksinvariante Vektorfelder auf G, d.h.

$$X(gh) = \mathrm{d}L_g|_h X(h) \quad \text{für alle } g, h \in G, \quad (\text{entsprechend für } Y).$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Lie-Klammer $[X, Y]$ ein linksinvariantes Vektorfeld ist.

4. Aufgabe

(a) Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, $e \in G$ das neutrale Element und $U \subset G$ eine beliebige offene Umgebung von e. Zeigen Sie, dass G von U erzeugt wird, d.h., dass G die kleinste Untergruppe ist, die U enthält.

(b) Zeigen Sie, dass die Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^\top A = E, \det(A) = 1\}$ zusammenhängend ist, $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^\top A = E\}$ jedoch nicht.

Abgabe und Besprechung in der Übung am 6.5.2010.