Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. E. Leuzinger

Sommersemester 2010

Homogene und Symmetrische Räume

Übung 3

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem *Vektorprodukt* (Kreuzprodukt)

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix},$$

eine Lie-Algebra bildet, die isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ von $\mathrm{SO}(3)$ ist.

2. Aufgabe

Zeigen Sie am Beispiel $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, dass die Exponentialabbildung exp im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist.

3. Aufgabe

Die *Heisenberg-Gruppe* ist die folgende 3-dimensionale Lie-Untergruppe $\mathrm{H}(3)$ von $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{H}(3) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{h}(3) \cong \mathrm{T}_E\mathrm{H}(3)$ gegeben ist durch

$$\mathfrak{h}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel für die Heisenberg-Gruppe: Bestimmen Sie für $A, B \in \mathfrak{h}(3)$ und genügend kleines $t \in \mathbb{R}$ ein $C(t) \in \mathfrak{h}(3)$ mit

$$\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{C(t)}.$$

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, dass die Lie-Algebren $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(2, 1)$ und $\mathfrak{su}(1, 1)$ isomorph sind.

Abgabe und Besprechung in der Übung am 20.5.2010.