Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 1 **16.04.2014**

Aufgabe 1

Für zwei Strahlen $g(t) := tv + w$ und $h(s) := su + w$ mit $u, v, w \in \mathbb{R}^2, s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist der Winkel im Schnittpunkt w definiert als die eindeutig bestimmte Zahl $\eta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\eta) = \frac{< v, u >}{\|v\| \|u\|}$$

Es sei nun ΔABC ein Dreieck in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ mit Kanten der Länge a, b und c (jeweils gegenüber von A, B bzw. C) und sei $\gamma = \measuredangle BCA$ der Winkel bei C. Zeigen Sie, dass dann

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

gilt.

Bemerkung: Diese Aussage wird als (euklidischer) Kosinussatz bezeichnet.

Aufgabe 2

Es sei $\mathfrak{I} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$\mathfrak{I}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{für } z = 0 \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{I}$ stetig ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die erweiterte stereographische Projektion

$$\sigma : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

ein Homöomorphismus ist.
Das heißt, σ ist bijektiv und σ und σ^{-1} sind stetig.

Aufgabe 4

Seien $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ und sei m die gebrochen rationale Abbildung

$$m : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}\ ,\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

In der Vorlesung wurde für $ad - bc \neq 0$ gezeigt, dass m ein Homöomorphismus ist. Gilt dies auch, wenn $ad - bc = 0$ gilt?