Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie — Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 10 — **18.06.2014**

Aufgabe 1

Es sei $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und

$$\Gamma(r) := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{r} \}$$

die *Kongruenzgruppe der Stufe r*.

Beweisen Sie, dass $\Gamma(r)$ für $r \geq 3$ torsionsfrei ist, d.h. $\Gamma(r)$ besitzt keine Untergruppen von endlicher Ordnung.

Zeigen Sie hierfür:

(i) Ist $A = I + rB \in \Gamma(r)$ und $A^m = I$, so gilt $rd|m$, wobei d der ggT aller Einträge von B ist.

(ii) Ist $\Gamma(r) \ni A \neq I$ ein Element endlicher Ordnung, so gilt $r = \mathrm{ord}(A)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\beta : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n \ ; \ (x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{x_{n+1}+1}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}+1}, 0)$$
$$\gamma : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \ ; \ (x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}})$$

aus dem Beweis von Satz 4.2 Isometrien sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass ihr Lieblingsmodell ($\mathbb{H}^1, \mathbb{D}^1, \mathbb{L}^1$ oder $\mathbb{K}^1$) der eindimensionalen "hyperbolischen" Geometrie zu $\mathbb{E}^1$ isometrisch ist.

Aufgabe 4

Es sei $\mathbb{L}^n$ das Hyperboloid-Modell des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes und $q_L(x,y) := x * y := x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}$ das Lorentz-Produkt von $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Weiter sei $\|x\|_L := \sqrt{q_L(x,x)}$ und $\ell(x,y) := \|x-y\|_L$ für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Zeigen Sie:

- q_L ist symmetrisch und bilinear.
- ℓ ist symmetrisch und positiv-definit auf $\mathbb{L}^n$.
  Benutzen Sie hierfür ohne Beweis, dass ohne Einschränkung $x = (0, ..., 0, x_{n+1})$ *angenommen werden kann.*
- ℓ ist keine Metrik auf $\mathbb{L}^n$.