Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie — Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 11 — **25.06.2014**

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die linearen Isometrien von $\mathbb{L}^n$ eine Gruppe $O^+(n,1)$ bilden.

Zeigen Sie weiter, dass $O^+(n,1) \subseteq O(n,1)$ eine echte Untergruppe von $O(n,1) := \{M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \mid M^T J M = J\}$ ist.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass für $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ die Abbildung

$$\Phi_P : \mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{L}^2 \; ; \; (x,y,z) \mapsto (x',y',z')$$

definiert durch

$$\begin{pmatrix} z'-y' & x' \\ x' & z'+y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z-y & x \\ x & z+y \end{pmatrix} P^T$$

eine lineare Isometrie von $\mathbb{L}^2$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\sigma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow O^+(2,1) \; ; \; P \mapsto \Phi_P$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{kern}(\sigma) = \{\pm I\}$ ist.

(Fortsetzung folgt...)

Aufgabe 3

Es seien $x,y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $x * y := x_1y_1 + ... + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}$ sowie $q_L(x) := x * x$ und $\|x\|_L := \sqrt{q_L(x)}$.
Ein Vektor $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt

- *zeitartig*, falls $q_L(z) < 0$
- *raumartig*, falls $q_L(z) > 0$
- *lichtartig*, falls $q_L(z) = 0$

Zeigen Sie:

a) Ist x zeitartig und $x * y = 0$ mit $x,y \neq 0$, dann ist y raumartig.

b) Die Menge $Z^+ := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \text{ zeitartig und } x_{n+1} > 0\}$ ist konvex.

Aufgabe 4

Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ zeitartig mit $x_{n+1}, y_{n+1} > 0$ (oder $x_{n+1}, y_{n+1} < 0$).
Dann definiert man den *zeitartigen Winkel* $\measuredangle(x, y)$ zwischen x und y durch

$$\cosh(\measuredangle(x, y)) = \frac{x * y}{\|x\|_L \|y\|_L}$$

Zeigen Sie:

a) $\measuredangle(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = ty$ für ein $t \in \mathbb{R}$.

b) Für $x, y \in \mathbb{L}^n$ gilt: $\measuredangle(x, y) = d_{\mathbb{L}}(x, y)$.