Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie — Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 12 — **02.07.2014**

Aufgabe 1 *(Fortsetzung von Aufgabe 2 auf Blatt 11)*

a) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $M \in O^+(2,1)$ als Produkt $M = R_{\alpha_1} L_z R_{\alpha_2}$ von Matrizen der Form

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_x = \begin{pmatrix} \cosh x & 0 & \sinh x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh x & 0 & \cosh x \end{pmatrix}$$

schreiben lässt.

b) Zeigen Sie, dass $\sigma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow O^+(2,1)\ ;\ P \mapsto \Phi_P$ surjektiv ist.

c) Folgern Sie: $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong O^+(2,1)$

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 4.3, dass $\mathbb{H}^n$ homogen ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie an Ihren zwei Lieblingsmodellen, dass der n-dimensionale hyperbolische Raum homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 4

Ein *Tangentialvektor* von $\mathbb{L}^n$ in einem Punkt $P \in \mathbb{L}^n$ ist die Ableitung $\gamma'(0)$ einer differenzierbaren Kurve $\gamma : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{L}^n$ mit $\gamma(0) = P$.
Die Menge aller Tangentialvektoren von $\mathbb{L}^n$ in P heißt *Tangentialraum* von $\mathbb{L}^n$ in P und wird mit $T_p\mathbb{L}^n$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $T_P\mathbb{L}^n = \{Q \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Q * P = 0\}$ gilt.

b) Folgern Sie, dass $T_P\mathbb{L}^n$ ein raumartiger Vektorraum ist, d.h. jeder Vektor $v \neq 0$ in $T_P\mathbb{L}^n$ ist raumartig.