Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie — Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 13 — **09.07.2014**

Aufgabe 1

Es sei $X = \mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{E}^2$ ausgestattet mit der Teilraummetrik.

a) Zeigen Sie, dass X geodätisch ist.

b) Zeigen Sie, dass X δ-hyperbolisch ist und bestimmen Sie das optimale δ.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$c : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^2 \; ; \; t \mapsto (t \cdot \cos(\log(1+t)), t \cdot \sin(\log(1+t)))$$

ein quasi-geodätischer Strahl ist.

b) Skizzieren Sie das Bild von c.

c) Zeigen Sie, dass es keinen geodätischen Strahl in $\mathbb{E}^2$ gibt, der endlichen Abstand von c hat.

Aufgabe 3

Es sei (X_1, d_1) ein δ_1-hyperbolischer Raum und (X_2, d_2) ein δ_2-hyperbolischer Raum. Für $w_1 \in X_1$, $w_2 \in X_2$ sei $Y := X_1 \vee X_2$ der durch Identifizieren von w_1 mit w_2 aus der disjunkten Vereinigung von X_1 und X_2 entstehende Raum.
Auf Y sei die Metrik d durch

$$d(x,y) := \begin{cases} d_i(x,y), & \text{falls } x, y \in X_i \text{ für } i = 1,2 \\ d_i(x, w_i) + d_j(w_j, y), & \text{falls } x \in X_i, y \in X_j \text{ und } i \neq j \end{cases}$$

definiert.

Zeigen Sie, dass Y wieder ein δ-hyperbolischer Raum (für ein $\delta > 0$) ist.

Aufgabe 4

Es sei G eine endlich erzeugte Gruppe und S, S' zwei endliche Erzeugendensysteme von G.
Die *Wortmetrik* d_S bezüglich des Erzeugendensystems S ist definiert als

$$d_S(x,y) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid xy^{-1} = s_1 s_2 ... s_k \text{ mit } s_i \in S \cup S^{-1}\}$$

(Analog definiert man die Wortmetrik bezüglich S'.)

Zeigen Sie: $(G, d_S) \cong_{q.i.} (G, d_{S'})$