Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 2 **23.04.2014**

Aufgabe 1

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn zu jeder Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch offene Mengen $U_i \subset X$ eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ existiert.

Zeigen Sie, ohne die stereographische Projektion zu verwenden, dass $\overline{\mathbb{C}}$ mit der in der Vorlesung beschriebenen Topologie kompakt ist.

Aufgabe 2

a) Es sei die *Bewegungsgruppe der euklidischen Ebene* definiert als

$$O(2) \ltimes \mathbb{R}^2 := \{(A, b) \in O(2) \times \mathbb{R}^2\}$$

mit der Verknüpfung $\quad (A, b) \circ (C, d) = (AC, b + Ad)$.

Zeigen Sie, dass diese Gruppe auf der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ via $(A, b) \bullet x = Ax + b$ für $x \in \mathbb{E}^2 \quad$ transitiv operiert.

b) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $m : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, die die obere Halbebene $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abbildet.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass

$$f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \; ; \; z \mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } z = \infty \\ z^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>nicht</u> invariant unter Möb^+ ist.
Bestimmen Sie außerdem die größte Untergruppe von Möb^+, die f invariant lässt.

Aufgabe 4

Beweisen Sie Proposition 1.10 aus der Vorlesung:

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Dann liegen z_1, z_2, z_3, z_4 genau dann auf einem Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$, wenn das Doppelverhältnis $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ reell ist.