Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 3

30.04.2014

Aufgabe 1

Es sei

$$C : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}\ ;\ z \mapsto \begin{cases} \overline{z} & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{falls } z = \infty \end{cases} \quad (\text{Lese: } \overline{\infty} := \infty)$$

die Spiegelung am Kreis $\overline{\mathbb{R}}$.
Weiter sei $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein beliebiger Kreis und $m \in$ Möb eine Möbiustransformation die $\overline{\mathbb{R}}$ auf A abbildet.
Die Spiegelung an A definiert man nun als

$$C_A := m \circ C \circ m^{-1}$$

Zeigen Sie, dass C_A wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl von m abhängt.

Aufgabe 2

Es sei Möb $:= \langle \text{Möb}^+, C \rangle$ die allgemeine Möbius-Gruppe, wobei C die Spiegelung am Kreis $\overline{\mathbb{R}}$ (siehe Aufgabe 1) bezeichnet.

Zeigen Sie, dass sich jedes Element von Möb als Komposition endlich vieler Spiegelungen an Kreisen von $\overline{\mathbb{C}}$ schreiben lässt.

Hinweis: Es genügt dies für die Transformationen

$$C(z) = \overline{z}, \quad J(z) = \frac{1}{z}, \quad f(z) = az + b \ \text{ mit } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

zu zeigen. (Zusatzfrage: Warum?)

Aufgabe 3

Es sei $\sigma := -C : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto -\overline{z}$ die Spiegelung an der imaginären Achse.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \sigma$$

Aufgabe 4

Sei $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A = 1\}$ die spezielle lineare Gruppe mit reellen Einträgen.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ von den Matrizen der Form

$$T_x := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \text{ und } S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.