Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 4 — **08.05.2014**

Aufgabe 1

Sei $SO(2) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AA^T = I, \det A = 1\} = O(2) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ die spezielle orthogonale Gruppe.

a) Erinnern Sie sich an die Operation von $O(n) \ltimes \mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{E}^2$.

b) Zeigen Sie, dass $SO(2) = SO(2) \ltimes \{0\}$ einfach-transitiv auf den Strahlen mit Basispunkt 0 in $\mathbb{E}^2$ operiert.

c) Zeigen Sie, dass $SO(2)$ als Gruppe isomorph zu $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, ausgestattet mit komplexer Multiplikation, ist.

Aufgabe 2

Es sei $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
Bestimmen Sie alle Möbiustransformationen $m \in \text{Möb}^+$ mit $m(\mathbb{D}^2) = \mathbb{D}^2$.

Aufgabe 3

Es seien $X_1, X_2 \subset \mathbb{C}$ zwei sich schneidende euklidische Geraden.

a) Zeigen Sie, dass $J(z) = \frac{1}{z}$ konform ist, indem Sie die in der Vorlesung offen gelassenen Fälle

   (i) $J(X_1), J(X_2)$ sind zwei euklidische Geraden.

   (ii) $J(X_1), J(X_2)$ sind ein euklidischer Kreis und eine euklidische Gerade.

   beweisen.

b) Zeigen Sie, dass $C(z) = \overline{z}$ konform ist.

Aufgabe 4

Es sei $R > 0$ und $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (R \cdot \cos(2\pi t) + 2R\ ,\ R \cdot \sin(2\pi t))$

a) Skizzieren Sie das Bild von γ.

b) Zeigen Sie, dass γ differenzierbar ist.

c) Berechnen Sie die (euklidische) Länge von γ.

d) Parametrisieren Sie γ nach Bogenlänge.