Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 5 **14.05.2014**

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

a) $(\mathbb{S}^2(R), d_S)$ ist ein metrischer Raum.

b) $(\mathbb{S}^2(R), d_S)$ ist 2-Punkt-homogen.

Aufgabe 2

Es sei $M = \mathbb{R}^2$ und $d_{KVV} : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$d_{KVV}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \begin{cases} |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{falls } x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2| & \text{falls } x_1 = y_1 \end{cases}$$

definierte Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass (M, d_{KVV}) ein metrischer Raum ist.

b) Skizzieren Sie wie d_{KVV} misst und überlegen Sie woher der Name kommt.

Aufgabe 3

a) Es sei $R > 0$ und $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (R \cdot \cos(2\pi t)\ ,\ R \cdot \sin(2\pi t) + 2R)$

   i) Skizzieren Sie das Bild von γ für $R = 1, R = 2$ und $R = 3$.

   ii) Zeigen Sie, dass die hyperbolische Länge von γ unabhängig von R ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}^2, d_h)$ 2-Punkt-homogen ist.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Translationen $\mathbb{R}^2 = \{T_a : x \mapsto x + a \mid a \in \mathbb{R}^2\}$ ein Normalteiler in der euklidischen Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2) = O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ ist, d.h.

(i) $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ ist eine Untergruppe.

(ii) Es gilt $\Phi_{A,a}^{-1} \circ \mathbb{R}^2 \circ \Phi_{A,a} \subseteq \mathbb{R}^2$ für alle $\Phi_{A,a} = [x \mapsto Ax + a] \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$.