Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 6 **22.05.2014**

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Formeln für die hyperbolische Metrik d_h aus Satz 2.13:

(i) $d_h(z,w) = \ln(\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|})$

(ii) $\cosh(d_h(z,w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w}$

(iii) $\sinh(\frac{1}{2}d_h(z,w)) = \frac{|z-w|}{2\sqrt{\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w}}$ (in der Vorlesung gezeigt)

(iv) $\cosh(\frac{1}{2}d_h(z,w)) = \frac{|z-\overline{w}|}{2\sqrt{\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w}}$

(v) $\tanh(\frac{1}{2}d_h(z,w)) = \frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation

$$m : (\mathbb{H}^2, d_h) \longrightarrow (\mathbb{D}^2, d_h^*) \; ; \; z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$$

eine Isometrie ist.

b) Zeigen Sie des weiteren die folgenden Formeln für die Metrik d_h^* :

(i) $d_h^*((0,0),(0,r)) = \ln(\frac{1+r}{1-r})$

(ii) $\cosh^2(\frac{1}{2}d_h^*(z,w)) = \frac{|1-z\overline{w}|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$

Aufgabe 3

Beweisen Sie:

Hyperbolische Kreise sind euklidische Kreise mit anderen Radien und anderen Mittelpunkten.

Berechnen Sie außerdem den hyperbolischen Radius für einen euklidischen Kreis in $\mathbb{D}^2$ mit Zentrum in $(0,0)$ und euklidischem Radius ρ.

Aufgabe 4

Beweisen Sie:

Die Geodätischen in $(\mathbb{D}^2, d_h^*)$ sind Segmente von euklidischen Kreisen orthogonal zum Einheitskreis $\mathbb{S}^1$.

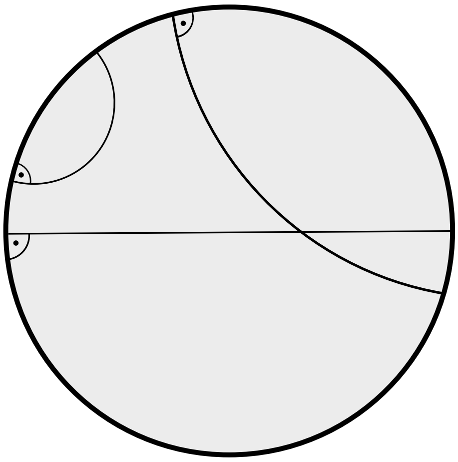

Abbildung 1: Geodätische im Poincaré-Kreisscheiben-Modell