Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie — Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 8 — **05.06.2014**

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass das Flächenelement für das Kreisscheibenmodell $\mathbb{D}^2$ mit Polarkoordinaten r, Θ durch $\frac{4}{(1-r^2)^2} r \cdot dr\, d\Theta$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie den hyperbolischen Umfang $L_h(\partial B_R)$ einer hyperbolischen Kreisscheibe B_R mit Radius $R > 0$.

c) Berechnen Sie den hyperbolischen Flächeninhalt $A_h(B_R)$ einer hyperbolischen Kreisscheibe B_R mit Radius $R > 0$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

Es seien $P_1, P_2 \subset \mathbb{H}^2$ zwei Fundamentalbereiche für eine Fuchssche Gruppe Γ, sodass die Ränder hyperbolischen Flächeninhalt 0 haben und $A_h(P_1) < \infty$.

Dann gilt: $A_h(P_1) = A_h(P_2)$

Aufgabe 3

Beweisen Sie Proposition 3.3 aus der Vorlesung:

Es seien g_1, g_2 zwei sich im Punkt P schneidende Geodätische in $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2$ oder $\mathbb{H}^2$ und σ_1, σ_2 die Spiegelungen an g_1 und g_2.

Dann gilt: $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ist eine Drehung um P mit Winkel $\alpha = 2\measuredangle_P(g_1, g_2)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des kleinsten hyperbolischen Dreiecks, dessen Innenwinkel von der Form $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ mit $k, l, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sind.

Hinweis: Diese Frage scheint eng verwandt mit der Frage „nach dem Leben, dem Universum und dem ganzen Rest"...