Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Übungsblatt 9 **12.06.2014**

Aufgabe 1

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $A \neq I$ und $\mathrm{Spur}(A) := a + d$. Dann heißt A

i) *elliptisch*, falls $|\mathrm{Spur}(A)| < 2$

ii) *parabolisch*, falls $|\mathrm{Spur}(A)| = 2$

iii) *hyperbolisch*, falls $|\mathrm{Spur}(A)| > 2$

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{array}{lcl} A \text{ ist elliptisch} & \Leftrightarrow & T_A \text{ hat genau einen Fixpunkt in } \mathbb{H}^2 \\ A \text{ ist parabolisch} & \Leftrightarrow & T_A \text{ hat genau einen Fixpunkt in } \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ A \text{ ist hyperbolisch} & \Leftrightarrow & T_A \text{ hat genau zwei Fixpunkt in } \mathbb{R} \cup \{\infty\} \end{array}$$

wobei T_A die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ bezeichnet.

b) Es sei $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und T_A die zugehörige Möbiustransformation.
Zeigen Sie:

(1) Ist A parabolisch, so ist die von T_A erzeugte zyklische Gruppe $P_A = \langle T_A \rangle$ eine Fuchssche Gruppe.

(2) Ist A hyperbolisch, so ist die von T_A erzeugte zyklische Gruppe $H_A = \langle T_A \rangle$ eine Fuchssche Gruppe.

(3) Ist A elliptisch, so ist die von T_A erzeugte zyklische Gruppe $E_A = \langle T_A \rangle$ genau dann eine Fuchssche Gruppe, wenn $\# E_A < \infty$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

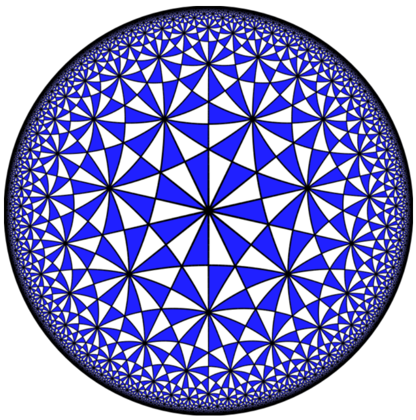
Die Gruppe

$$\Gamma := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{3} \}$$

operiert, im Gegensatz zu $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, frei auf $\mathbb{H}^2$ (d.h. falls $T_A(z) = z$ für ein $z \in \mathbb{H}^2$, so folgt $T_A = id$) .

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Dreiecksgruppe Γ_Δ für das Fundamentaldreieck $\Delta = (2, 3, 7)$ (*Schwarz Dreieck*).



Parkettierung von $\mathbb{D}^2$ mit Fundamentaldreieck $\Delta = (2, 3, 7)$

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie den Dirichlet-Fundamentalbereich $D_0(\Gamma)$ für die Gruppenoperation von $\Gamma = 3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{E}^2$ durch Translationen.

b) Bestimmen Sie den Dirichlet-Fundamentalbereich $D_i(\Gamma)$ für die Gruppenoperation von $\Gamma = \langle z \mapsto z + a \rangle$, $a > 0$, auf $\mathbb{H}^2$.