Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Hyperbolische Geometrie

Sommer-Semester 2014

Lösungen zu Übungsblatt 1 **25.04.2014**

Aufgabe 1

Für zwei Strahlen $g(t) := tv + w$ und $h(s) := su + w$ mit $u, v, w \in \mathbb{R}^2, s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist der Winkel im Schnittpunkt w definiert als die eindeutig bestimmte Zahl $\eta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\eta) = \frac{< v, u >}{\|v\| \|u\|}$$

Es sei nun ΔABC ein Dreieck in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ mit Kanten der Länge a, b und c (jeweils gegenüber von A, B bzw. C) und sei $\gamma = \measuredangle BCA$ der Winkel bei C. Zeigen Sie, dass dann

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

gilt.

Bemerkung: Diese Aussage wird als (euklidischer) Kosinussatz bezeichnet.

Lösung:

Es seien $g(t) := tv + C$ und $h(s) := su + C$ mit $v, u \in \mathbb{S}^1$, $t \in [0, b], s \in [0, a]$ die parametrisierten Kanten von C nach A bzw. B. Dann lässt sich die Kante zwischen B und A schreiben als $k(r) = r(\frac{h(a)-g(b)}{c}) + B$ mit $r \in [0, c]$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
c^2 &= \|k(c)\|^2 \\
&= \|h(a) - g(b)\|^2 \\
&= \langle h(a) - g(b), h(a) - g(b)\rangle \\
&= \langle h(a), h(a)\rangle - 2\langle h(a), g(b)\rangle + \langle g(b), g(b)\rangle \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Es sei $\mathfrak{J} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$\mathfrak{J}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{für } z = 0 \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{J}$ stetig ist.

Lösung:

Sei (z_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $z \in \overline{\mathbb{C}}$

Fall 1: $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
ŒE: $z_n \neq \{0, \infty\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Dann ist auch $\mathfrak{J}(z_n) = \frac{1}{z_n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{J}(z_n)) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{z_n}) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} z_n} = \frac{1}{z} = \mathfrak{J}(z)$$

Fall 2: $z = 0$
$\Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0 : |z_N| < \varepsilon$
$\Rightarrow\ |\frac{1}{z_N}| > \frac{1}{\varepsilon}$
$\Rightarrow\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0 : |\frac{1}{z_N}| > m$
$\Rightarrow\ \mathfrak{J}(z_n) = \frac{1}{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty = \mathfrak{J}(0)$

Fall 3: $z = \infty$
$\Rightarrow\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0 : |z_N| > m$
$\Rightarrow\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq n_0 : \frac{1}{|z_N|} < \frac{1}{m}$
$\Rightarrow\ \mathfrak{J}(z_n) = \frac{1}{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = \mathfrak{J}(\infty)$

Also ist $\mathfrak{J}$ in allen $z \in \overline{\mathbb{C}}$ stetig, also stetig. $\square$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die erweiterte stereographische Projektion

$$\sigma : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

ein Homöomorphismus ist.
Das heißt, σ ist bijektiv und σ und σ^{-1} sind stetig.

Lösung:

Um die Bijektivität von σ zu zeigen, geben wir eine Umkehrabbildung π an.
Als erstes setzen wir $\pi(\infty) = e_3$.
Nach Konstruktion von σ muss für einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ gelten:

$$\pi(z) = z + t(e_3 - z) \quad \text{für ein passendes } \ t \in \mathbb{R}$$

Weiter gilt $\pi(z) \in \mathbb{S}^2$, also $\|\pi(z)\|^2 = 1$
Löst man diese Gleichung nach t auf, erhält man $t_1 = 1$ und $t_2 = \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1}$.
Die Lösung t_1 ergibt $\pi(z) = e_3 \ \forall z \in \mathbb{C}$, was wir nicht möchten.
Die Lösung t_2 ergibt:

$$\pi(z) = \pi(x,y) = (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2})$$

Die Konstruktion (oder Nachrechnen) zeigt, dass π zu σ invers ist.

Nun zur Stetigkeit:
Die Umkehrabbildung π ist in allen $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ stetig. (Analysis II: komponentenweise Stetigkeit, etc.)
Sei $(z_n) = (x_n, y_n)$ eine in $\overline{\mathbb{C}}$ konvergente Folge mit Grenzwert ∞.
Dann gilt $x \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ und $y \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \pi(z_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(x_n, y_n) &= \lim_{n\to\infty}(\frac{2x_n}{1+x_n^2+y_n^2}, \frac{2y_n}{1+x_n^2+y_n^2}, \frac{x_n^2+y_n^2-1}{1+x_n^2+y_n^2}) \\
&= (\lim_{n\to\infty}(\frac{2x_n}{1+x_n^2+y_n^2}), \lim_{n\to\infty}(\frac{2y_n}{1+x_n^2+y_n^2}), \lim_{n\to\infty}(\frac{x_n^2+y_n^2-1}{1+x_n^2+y_n^2})) \\
&= (0,0,1) = e_3 = \pi(\infty) = \pi(\lim_{n\to\infty}(z_n))
\end{aligned}$$

Also ist $\pi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ stetig.

Die Stetigkeit von σ zeigt man analog, oder benutzt den folgenden topologischen Satz:

Es sei X ein kompakter Raum, Y ein Hausdorffraum und $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv und stetig.
Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis:
f stetig, surjektiv, X kompakt $\Rightarrow Y = f(X)$ kompakt
(Bilder von Kompakta unter stetigen Abbildungen sind kompakt)
$U \subset X$ offen $\Rightarrow \ X \setminus U$ abgeschlossen, also kompakt, da X kompakt.
Darus folgt, dass $f(X \setminus U)$ abgeschlossen ist, da kompakte Teilmengen von Hausdorffräumen abgeschlossen sind.
Sei nun $g = f^{-1}$
$\Rightarrow \ g^{-1}(U) = Y \setminus g^{-1}(X \setminus U) = Y \setminus \underbrace{f(X \setminus U)}_{abgeschlossen}$ *offen*
Also ist g stetig und f somit ein Homöomorphismus.

Wir können diesen Satz auf π anwenden, da $\mathbb{S}^2$ kompakt und $\overline{\mathbb{C}}$ hausdorffsch ist.
Also ist π und damit auch σ ein Homöomorphismus. $\square$

Aufgabe 4

Seien $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ und sei m die gebrochen rationale Abbildung

$$m : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}\ ,\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

In der Vorlesung wurde für $ad - bc \neq 0$ gezeigt, dass m ein Homöomorphismus ist. Gilt dies auch, wenn $ad - bc = 0$ gilt?

Lösung:

Sei $ad - bc = 0$

Fall 1: $a = 0$

$$\Rightarrow\ bc = 0\ \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \ \Rightarrow m = 0 \\ c = 0 \ \Rightarrow m = \frac{b}{d} \end{cases}$$

Fall 2: $a \neq 0$

$\Rightarrow\ d = \frac{bc}{d}$

$\Rightarrow\ m(z) = \frac{az+b}{c(z+\frac{b}{a})} = \frac{(az+b)a}{c(az+b)} = \frac{a}{c}$

Also ist m konstant, insbesondere nicht injektiv.
Somit ist m kein Homöomorphismus. $\square$