Aufgabe 1

Es seien $e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), e_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ und $U := [e_2, e_3]$ der von e_2, e_3 erzeugte Untervektorraum.

Weiter sei

$$G := \{A \in \mathbf{GL}(3,\mathbb{R}) \mid A \cdot e_1 = e_1 \text{ und } A \cdot U \subset U\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $\mathbf{GL}(3,\mathbb{R})$ ist.

(b) Geben Sie einen Isomorphismus von Gruppen $\Phi : \mathbf{GL}(2,\mathbb{R}) \to G$ an.

Erinnerung: $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ bezeichnet die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.

Lösung:

(a)
- Die Einheitsmatrix E_3 lässt alle Vektoren im $\mathbb{R}^3$ fest, also insbesondere e_1 und U. Somit ist $E_3 \in G$.
- Für $A, B \in G$ gilt

  $$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot e_1 &= A \cdot (B \cdot e_1) = A \cdot e_1 = e_1,\\ (A \cdot B) \cdot U &= A \cdot (B \cdot U) \subset A \cdot U \subset U.\end{aligned}$$

  Somit ist auch $A \cdot B \in G$.
- Weiter gilt für $A \in G$:

  $$e_1 = E_3 \cdot e_1 = A^{-1} \cdot A \cdot e_1 = A^{-1} \cdot e_1.$$

  Nun sei $u \in U$ und

  $$A^{-1} \cdot u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

  Da $A \cdot e_1 = e_1$, folgt nun

  $$u = E_3 \cdot u = A \cdot A^{-1} \cdot u = \alpha e_1 + \beta A \cdot e_2 + \gamma A \cdot e_3 \in U = [e_2, e_3],$$

  also $\alpha = 0$. Somit gilt auch

  $$A^{-1} \cdot u = \beta e_2 + \gamma e_3 \in U,$$

  also $A^{-1} \cdot U \subset U$ und insgesamt $A^{-1} \in G$.

(b) Zunächst überlegen wir uns, wie die Matrizen $A \in G$ aussehen.

Die Bedingung $A \cdot e_1 = e_1$ schreibt sich

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Folglich $a_{11} = 1$ und $a_{21} = a_{31} = 0$.

Die Bedingung $A \cdot U \subset U$ schreibt sich damit als

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}\beta + a_{13}\gamma \\ a_{22}\beta + a_{23}\gamma \\ a_{32}\beta + a_{33}\gamma \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in U$$

für beliebige $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Somit gilt $a_{12} = a_{13} = 0$.
Also ist $A \in G$ von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

und da $\det(A) \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist $a_{22}a_{32} - a_{23}a_{33} \neq 0$.
Nun definieren wir die Abbildung

$$\Phi : \mathbf{GL}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

- Dann ist $\Phi(B)$ invertierbar für alle $B \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$, da

  $$\det(\Phi(B)) = 1 \cdot \det(B) \neq 0.$$

  Außerdem gilt offensichtlich

  $$\Phi(B) \cdot e_1 = e_1, \quad \Phi(B) \cdot e_2 = ae_2 + ce_3, \Phi(B) \cdot e_3 = be_2 + de_3 \in U.$$

  Also Bild $\Phi \subset G$.
- Φ ist ein Homomorphismus von Gruppen:

  $$\Phi(A_1) \cdot \Phi(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & A_1 \cdot A_2 \end{pmatrix} = \Phi(A_1 \cdot A_2).$$

- Φ ist surjektiv: Für $A \in G$ in der Form $(*)$ ist $B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ein Urbild unter Φ.
- Φ ist injektiv: Das folgt sofort aus der Abbildungsvorschrift für Φ.

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei Untervektorräume U, W des $\mathbb{R}^4$,

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U \cap W$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U + W$.

Lösung:

(a) Jeder Vektor im Schnitt muss sich als Linearkombination sowohl der Erzeuger von U als auch der Erzeuger von W schreiben lassen. Also setze an:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Schreibe dies als LGS und löse mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Daraus lesen wir $\beta_1 = 1, \beta_2 = -1$ ab, und somit wird der Schnitt erzeugt von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $\dim U \cap W = 1$.

(b) Aus dem LGS $(*)$ lesen wir ab, dass die erste, zweite und dritte Spalte linear unabhängig sind. Somit bilden sie eine Basis von $U + W$:

$$U + W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

Aufgabe 3

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V^\star$ der Dualraum von V.

Für einen Untervektorraum U von V definieren wir

$$U^0 := \{\varphi \in V^\star \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Zeigen Sie:

(a) U^0 ist ein Untervektorraum von $V^\star$.

(b) Für Untervektorräume U, W von V gilt:

(i) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$.

(ii) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

Lösung:

(a) Die 0-Abbildung ist ein Element von U^0.
Für $\varphi, \psi \in U^0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und beliebiges $u \in U$ gilt

$$(\lambda\varphi + \mu\psi)(u) = \lambda\varphi(u) + \mu\psi(u) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

also $\lambda\varphi + \mu\psi \in U^0$. Somit ist U^0 ein Untervektorraum von $V^\star$.

(b) (i) Ist $\varphi(u + w) = 0$ für alle $u \in U, w \in W$, so gilt insbesondere $\varphi(u + 0) = 0 = \varphi(0 + w)$. Umgekehrt folgt aus der Linearität von φ, dass $\varphi(u) = 0 = \varphi(w)$ auch $\varphi(u + w)$ zur Folge hat. Also gilt:

$$\begin{aligned}(U + W)^0 &= \{\varphi \in V^\star \mid \varphi(u + w) = 0 \text{ für alle } u \in U, w \in W\} \\ &= \{\varphi \in V^\star \mid \varphi(u) = 0, \varphi(w) = 0 \text{ für alle } u \in U, w \in W\} \\ &= \{\varphi \in V^\star \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \cap \{\varphi \in V^\star \mid \varphi(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \\ &= U^0 \cap W^0.\end{aligned}$$

(ii) „$\supseteq$“: Für $\varphi \in U^0$ gilt insbesondere $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in U \cap W$. Also $U^0 \subset (U \cap W)^0$. Analog $W^0 \subset (U \cap W)^0$. Somit ist $U^0 \cup W^0 \subset (U \cap W)^0$, und da letzteres ein Vektorraum ist, gilt auch

$$U^0 + W^0 = [U^0 \cup W^0] \subseteq (U \cap W)^0.$$

„$\subseteq$“: Sei $\varphi \in (U \cap W)^0$. Mittels linearer Fortsetzung können wir folgende lineare Abbildung definieren

$$\varphi_U(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \in V \setminus U \\ 0, & x \in U \end{cases}.$$

Es ist $\varphi_U \in U^0$. Dann ist $\varphi_W := \varphi - \varphi_U \in W^0$ und somit

$$\varphi = \varphi_U + \varphi_W \in U^0 + W^0,$$

und da φ beliebig gewählt war, gilt $(U \cap W)^0 \subseteq U^0 + W^0$.

Aufgabe 4

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2\alpha & \beta & \alpha \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A abhängig von α und β.

(b) Sei nun $\beta = 2$. Bestimmen Sie die Eigenräume von A abhängig von α.

Lösung:

(a) Bestimme das charakteristische Polynom p_A von A:

$$p_A = \det(A - XE_3) = \det \begin{pmatrix} -3-X & 0 & 0 \\ 2\alpha & \beta - X & \alpha \\ 10 & 0 & 2-X \end{pmatrix} = (-3-X)(\beta - X)(2-X).$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von p_A, also

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \beta, \quad \lambda_3 = 2.$$

Falls $\beta \neq 2, -3$ sind alle Eigenwerte einfach.

(b) Für $\beta = 2$ ist 2 ein doppelter Eigenwert von A, der Eigenraum von A kann also Dimension 1 oder 2 haben.

(i) Bestimme den Eigenraum $E(2) = \text{Kern}(A - 2 \cdot E_3)$:

$$A - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 0 & \alpha \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 0$ ist der Rang dieser Matrix 1 und der Eigenraum ist

$$E(2) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Für $\alpha \neq 0$ ist der Rang 2, der Eigenraum ist

$$E(2) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

(ii) Bestimme den Eigenraum $E(-3) = \text{Kern}(A + 3 \cdot E_3)$:

$$A + 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 5 & \alpha \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum ist (unabhängig von α)

$$E(-3) = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Aufgabe 5

Es sei $A_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix mit den Koeffizienten

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} .$$

(a) Berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ und $\det(A_4)$.

(b) Zeigen Sie:

$$\det(A_n) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1).$$

Lösung:

Die Matrix A_n sieht folgendermaßen aus:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) $\det(A_1) = \det(0) = 0.$

$\det(A_2) = \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$

$\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2.$

$\det(A_4) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^3 \cdot 3 = -3.$

(b) Inspiriert durch das Vorgehen bei $\det(A_4)$ lösen wir den allgemeinen Fall mit den folgenden Umformungen:

1. Subtrahiere die n-te Zeile jeweils von den Zeilen 1 bis $n-1$:

$$\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Addiere die Spalten 1 bis $n-1$ jeweils zur n-ten Spalte:

$$\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

3. Nun liegt eine untere Dreiecksgestalt vor, d.h. die Determinante kann als Produkt der Diagonalelemente abgelesen werden:

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n-1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1).$$
