Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 3 **31.10.2011**

Aufgabe 1

Gegeben seien die Mengen A, B und C sowie Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $g \circ f$ ist bijektiv $\Rightarrow$ f und g sind bijektiv.

b) f ist injektiv und g ist surjektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist surjektiv.

c) Sei $h : A \to A$ eine Abbildung von A in sich selbst und $\mathrm{id}_A : A \to A$ die Identität. Wenn $h \circ h = \mathrm{id}_A$ gilt, so ist h bijektiv.

Aufgabe 2

Es seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

i) f ist injektiv.

ii) Für alle $X, Y \subset A$ gilt: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

iii) Für alle $X \subset Y \subset A$ gilt: $f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$.

Aufgabe 3

a) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;:\Leftrightarrow\; x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1, 2)$.

b) Auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \;:\Leftrightarrow\; z_1 n_2 = z_2 n_1.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie eine bijektive Abbildung von der Menge M der Äquivalenzklassen, $M = \{\widetilde{(z, n)} \mid (z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$, auf die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen an.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 07.11.2011 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/edu/la1inf2011w/de.