Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 4 — **Wintersemester 2011/12**, **07.11.2011**

Aufgabe 1

(a) Stellen Sie folgende Permutationen durch Transpositionen dar und bestimmen Sie jeweils die Fehlstandszahl:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Bestimmen Sie die von σ erzeugte Untergruppe von S_4 sowie $\sigma^n := \underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{n \text{ Faktoren}}$, wobei n das Geburtsjahr von Carl Friedrich Gauß ist.

Aufgabe 2

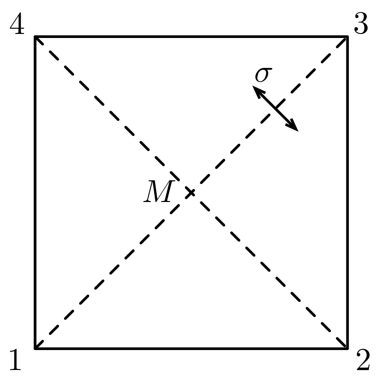
Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Ecken eines Quadrats mit Mittelpunkt M. Sei weiter

- τ eine Selbstabbildung von E, die durch eine Drehung um 90° um M gegen den Uhrzeigersinn gegeben ist,
- σ eine Selbstabbildung von E, die durch die Spiegelung an einer Diagonalen gegeben ist.

Durch Nummerierung der Ecken können wir σ und τ als Permutationen aus S_4 auffassen.

(a) Zeigen Sie: $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\tau^4 = \mathrm{id}$ und $\tau \circ \sigma \circ \tau = \sigma$.

(b) Bestimmen Sie die von σ und τ erzeugte Untergruppe von S_4 und stellen Sie die Verknüpfungstafel auf.



Bitte wenden

Aufgabe 3

Es seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ Gruppen, deren neutrale Elemente wir mit e_G bzw. e_H bezeichnen. Weiter sei $\Phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Der *Kern* von Φ ist die Menge

$$\text{Kern } \Phi := \{g \in G \mid \Phi(g) = e_H\}.$$

(a) Zeigen Sie:

  (i) Kern Φ ist eine Untergruppe von G.

  (ii) Φ ist genau dann injektiv, wenn Kern $\Phi = \{e_G\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) := (g_1 \bullet g_2, h_1 * h_2)$$

eine Gruppe ist. Sie wird *direktes Produkt* von G und H genannt.

Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$\Phi : (G \times H, \star) \to (G, \bullet), \quad (g, h) \mapsto g,$$

ein Homomorphismus ist. Bestimmen Sie außerdem den Kern von Φ.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 14.11.2011 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/edu/la1inf2011w/de.