Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 5 **14.11.2011**

Aufgabe 1

Bereits bekannt sind die Gruppen $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit der Addition als Verknüpfung und das direkte Produkt

$$G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit sich selbst (vergleiche Aufgabe 3 b), Blatt 04).

Zeigen Sie mit Hilfe von Verknüpfungstafeln der Form

$*$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

,

dass G_1 und G_2 die einzigen endlichen Gruppen mit vier Elementen sind (bis auf Umbenennung der Elemente). Hierbei bezeichne e stets das neutrale Element.

Hinweis: Verwenden Sie, dass in der Verknüpfungstafel einer endlichen Gruppe jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt. Begründen Sie dies!

Aufgabe 2

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$T_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i > j\}$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie:

(a) $T_n(\mathbb{K})$ ist ein Ring mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.

(b) Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ist $\varphi_k : T_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $(a_{ij}) \mapsto a_{kk}$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{x + \sqrt{2} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subsetneq \mathbb{R}$$

mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

b) Bestimmen Sie alle Nullteiler von $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 21.11.2011 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/edu/la1inf2011w/de.