Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Diego De Filippi

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 7

28.11.2011

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Welche sind falsch? Begründen Sie jeweils die Antwort!

(a) $V_1 = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und der Skalarmultiplikation, die gegeben sei durch $0 \cdot z := 0$ und $1 \cdot z := z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) $V_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ mit der üblichen Multiplikation als Vektoraddition und der Skalarmultiplikation $\lambda \odot v := v^\lambda$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) $V_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 = -y^2\}$ mit der von $\mathbb{Q}^2$ geerbten Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Aufgabe 2

(a) Gegeben sei eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, v_3\}$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{3X - X^5,\ 4X + X^3,\ 5X - X^5 - X^6\}$$

in $\mathbb{Q}[X]$ linear unabhängig ist.

Erweitern Sie diese Menge zu einer Basis von $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid \deg f \leq 9\}$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgende Teilmenge der komplexen Matrizen:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } a + d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass V *kein* komplexer Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass V ein *reeller* Vektorraum ist.

(c) Geben Sie eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum an.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 5.12.2011 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/edu/la1inf2011w/de