Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 8 **05.12.2011**

Aufgabe 1

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie M_1 und M_2 Teilmengen von V. Zeigen Sie:

(a) $[M_1 \cap M_2] \subset [M_1] \cap [M_2]$.

(b) In (a) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit.

(c) $[M_1 \cup M_2] = \Big[[M_1] \cup [M_2]\Big]$ und insbesondere $[[M]] = [M]$.

Aufgabe 2

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis B, und $M \subset V$ sei eine endliche linear unabhängige Teilmenge.

Zeigen Sie, dass es eine Teilmenge $A \subset B$ gibt, so dass $(B \setminus A) \cup M$ eine Basis von V ist.

Aufgabe 3

(a) Es seien im $\mathbb{R}^4$ die Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \overline{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B nach $\overline{B}$.

(b) Für den Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[X]$ vom Grad ≤ 3 seien folgende drei Basen gegeben:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{1 - X^2 + X^3,\ X - X^2,\ 1 - X + X^2,\ 1 - X\} \\ B_2 &:= \{1 - X^3,\ 1 - X^2,\ 1 - X,\ 1 + X^2 - X^3\} \\ B_3 &:= \{1, X, X^2, X^3\} \end{aligned}$$

Geben Sie die folgenden Komponentenvektoren in $\mathbb{R}^4$ an:

$\Theta_{B_3}(b)$ für alle $b \in B_1$ $\qquad$ $\Theta_{B_3}(b)$ für alle $b \in B_2$

$\Theta_{B_1}(b)$ für alle $b \in B_3$ $\qquad$ $\Theta_{B_2}(b)$ für alle $b \in B_3$

Bestimmen Sie außerdem die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B_1 nach B_2.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 12.12.2011 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/edu/la1inf2011w/de