Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12

Weihnachtsübungsblatt 19.12.2011

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind ausgewählte Aufgaben aus den Klausuren der letzten Jahre. Sie sind mit dem in der Vorlesung behandelten Stoff lösbar. Unter Klausurbedingungen haben Sie für diese Aufgaben durchschnittlich 20 Minuten Zeit zur Bearbeitung.

Aufgabe 1

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ mit

$$U_1 := \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad U_2 := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie zu $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist

$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Sind speziell

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix},$$

so gilt für den Untervektorraum U aus Teil (a)

$$U = \{0\} \iff \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset.$$

Aufgabe 3

Es seien $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G und $(H, \cdot)$ eine weitere Gruppe.

(a) Geben Sie die Definition eines Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow H$ an und beweisen Sie, dass für solch einen Gruppenhomomorphismus $\Phi(e_G)$ das neutrale Element von H ist.

(b) Nun besitze G die Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ eine ungerade natürliche Zahl n existiert mit $g^n = e_G$.

Zeigen Sie, dass es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow \{1, -1\}$ gibt.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es seien V ein Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V.

Zeigen Sie:

(a) $U_1 \subset U_3 \quad \Leftrightarrow \quad (U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

(b) $V = U_1 \cup U_2 \quad \Leftrightarrow \quad [V = U_1 \text{ oder } V = U_2]$.

Aufgabe 5

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Seien $a_1, a_2, a_3 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.

Zeigen Sie:

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_3].$$

(b) Seien $a_1, \ldots, a_n \in V \setminus \{0\}$.

Beweisen Sie, dass $a_1, \ldots, a_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn gilt

$$[a_1, \ldots, a_i] \cap [a_{i+1}, \ldots, a_n] = \{0\} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1.$$

Aufgabe 6

Auf $\mathbb{Z}$ sei eine Verknüpfung $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ erklärt durch $\alpha \circ \beta := \alpha + \beta + 5$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ isomorphe Gruppen sind.

(c) Lösen Sie die Gleichung $x \circ x = 21$ in $(\mathbb{Z}, \circ)$.

Für dieses Übungsblatt gibt es **keine Punkte**, es dient jedoch zur **Selbstkontrolle**. Daher können Sie wie gewohnt ihre Lösungen bis zum Montag, den 09.01.2012 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek) werfen. Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**.