Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Wolfgang Globke
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 10 09.01.2012

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{5\times 5}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ * & 0 & \# \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ den Rang von A^k.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $*$ und $\#$ den Rang von B .

Aufgabe 2

Im Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ sei der Untervektorraum

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

gegeben, womit der Faktorraum $\mathbb{Q}^3/U$ gebildet werde.

a) Geben Sie für die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

die Äquivalenzklassen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\widetilde{3x+y}$ und $\tilde{x} - 2\tilde{y}$ an.

b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{Q}^3/U$.

c) Stellen Sie die Vektoren

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}} \in \mathbb{Q}^3/U$$

bezüglich der Basis B dar. Sind diese beiden Vektoren linear unabhängig?

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

i) Finden Sie eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2; x \mapsto Ax$, so dass $\Phi \neq 0$ und $\Phi^2 := \Phi \circ \Phi = 0$.

ii) Es sei $\Phi : V \to V$ linear und es gelte $\Phi^k \neq 0$ und $\Phi^{k+1} = 0$ für ein $k > 0$. Zeigen Sie, dass es ein Element $x \in V$ gibt, so dass $\{x, \Phi(x), \cdots, \Phi^k(x)\}$ linear unabhängig ist.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 16.01.2012 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/edu/la1inf2011w/de.