Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Wolfgang Globke
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 11 16.01.2012

Aufgabe 1

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\Phi(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\Phi$, $\operatorname{Bild}\Phi$ und deren Dimensionen.

(c) Zeigen Sie, dass $\Phi \circ \Phi = \Phi$ ist.
Bemerkung: Eine lineare Abbildung mit dieser Eigenschaft nennt man eine Projektion.

Aufgabe 2

Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\Phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 + x_5 \end{pmatrix}.$$

Weiter seien drei Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^5$ gegeben mit $\beta \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie alle Parameterwerte β, für die die Vektoren (Restklassen) $a_i + \operatorname{Kern}\Phi$ $(i = 1, 2, 3)$ des Faktorraums $\mathbb{R}^5 / \operatorname{Kern}\Phi$ linear abhängig sind.

Aufgabe 3

Gegeben seien $\mathbb{K}$-Vektorräume V_1, V_2, V_3 sowie lineare Abbildungen $\Phi : V_1 \to V_2$ und $\Psi : V_2 \to V_3$. Zeigen Sie

a) $\operatorname{Rang}(\Psi \circ \Phi) = \operatorname{Rang}(\Phi) - \dim(\operatorname{Bild}\Phi \cap \operatorname{Kern}\Psi)$.

b) $\operatorname{Rang}(\Psi \circ \Phi) \leq \operatorname{Min}\{\operatorname{Rang}(\Phi), \operatorname{Rang}(\Psi)\}$.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 23.01.2012 um 12.00 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude Nr. 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie ihr Tutorium, ihren Namen und ihre Matrikelnummer**. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter finden Sie unter http://www.math.kit.edu/iag2/edu/la1inf2011w/de.