

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 12

23.01.2012

Aufgabe 1

Es sei $B := \{b_1, \dots, b_5\}$ eine Basis eines reellen Vektorraums V und Φ ein Endomorphismus von V mit

$$\begin{aligned}\Phi(b_1) &= 4b_1 + 2b_2 - 2b_4 - 3b_5, \\ \Phi(b_2) &= -2b_3 + b_5, \\ \Phi(b_3) &= -4b_2 + 2b_3 - b_5, \\ \Phi(b_4) &= -2b_1 + 3b_3 + b_4 - b_5, \\ \Phi(b_5) &= 3b_2 + 2b_5.\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von Φ und $\Phi \circ \Phi$ bezüglich B .

(b) Zeigen Sie: Die Menge $C := \{c_1, c_2, c_3\}$, bestehend aus den Vektoren

$$c_1 := b_2 + b_3 + b_5, \quad c_2 := -b_3 + b_5, \quad c_3 := b_2 + b_5,$$

ist Basis eines Untervektorraums U von V mit $\Phi(U) \subset U$.

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix des Endomorphismus $\Phi|_U : U \rightarrow U$ (das ist die Einschränkung von Φ auf U) bezüglich C .

Aufgabe 2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3; x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Bestimmen Sie eine (geordnete) Basis B von \mathbb{R}^4 und eine (geordnete) Basis C von \mathbb{R}^3 , so dass Φ bzgl. der Basen B und C folgende Abbildungsmatrix hat:

$$M_C^B(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\Phi \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- i) $V = \text{Kern}(\Phi) \oplus \text{Bild}(\Phi)$.
- ii) $\text{Kern}(\Phi) = \text{Kern}(\Phi^2)$.
- iii) $\text{Bild}(\Phi) = \text{Bild}(\Phi^2)$.