Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Wolfgang Globke
Diego De Filippi

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für die Fachrichtung Informatik

Wintersemester 2011/12

Übungsblatt für die vorlesungsfreie Zeit

06.02.2012

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \text{ und } a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i, j\}$$

eine Gruppe ist.

Aufgabe 2

Die *Fibonacci-Zahlen* sind definiert durch die Rekursion

$$\begin{gathered} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ f_0 = 0, \quad f_1 = 1. \end{gathered}$$

Die *Fibonacci-Matrix* ist

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass F zwei verschiedene reelle Eigenwerte γ und δ besitzt.

Bestimmen Sie außerdem die Eigenräume E_γ, E_δ.

(b) Stellen Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren von F dar.

(c) Zeigen Sie: $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ für $n \geq 1$.

(d) Geben Sie eine geschlossene Formel für f_n an (d.h. eine Formel, die nur von n abhängt, aber nicht von $f_{n-1}, \ldots, f_0$).

Aufgabe 3

Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & 0 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4

(a) Es sei $f \in \mathbb{K}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad n.

Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ an, deren charakteristisches Polynom $(-1)^n f$ ist.

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie: $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

(c) Es seien $C, D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnliche Matrizen. Folgern Sie aus Teil (b): $\operatorname{Spur}(C) = \operatorname{Spur}(D)$.

Aufgabe 5

Eine Verkettung von linearen Abbildungen der Form

$$V_1 \xrightarrow{\Phi} V_2 \xrightarrow{\Psi} V_3$$

heißt *exakte Sequenz*, wenn $\operatorname{Ker}\Psi = \operatorname{Bild}\Phi$ gilt.

(a) Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass

$$U \overset{\iota}{\hookrightarrow} V \xrightarrow{\pi} V/U$$

eine exakte Sequenz ist. Dabei bezeichne ι die Inklusion und π die kanonische Projektion.

(b) Es seien V_1, V_2 und V_3 von endlicher Dimension.

Zeigen Sie die *Exaktheit der Dualisierung*: Ist

$$V_1 \xrightarrow{\Phi} V_2 \xrightarrow{\Psi} V_3$$

eine exakte Sequenz, so ist auch

$$V_3^\star \xrightarrow{\Psi^\star} V_2^\star \xrightarrow{\Phi^\star} V_1^\star$$

eine exakte Sequenz. Dabei bezeichnen $\Phi^\star$ und $\Psi^\star$ jeweils die dualen Abbildungen.

Aufgabe 6

Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Der *Annullator* von U ist

$$U^0 := \{\Phi \in V^\star \mid \Phi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Zeigen Sie:

(a) U^0 ist ein Untervektorraum von $V^\star$.

(b) $U^0 \cong (V/U)^\star$.

(c) $U^\star \cong V^\star/U^0$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.