Determinanten und Volumen

Woher kommen Determinanten?

- Historisch gesehen wurden Determinanten von Gottfried Wilhelm Leibniz eingeführt, um geschlossene Formeln für die Lösungen linearer Gleichungssysteme zu finden.
- Auch Gabriel Cramer entwickelte Determinanten zu diesem Zweck. 1750 veröffentlichte er die Cramersche Regel, die solche geschlossenen Lösungen beschreibt.
- Leider ist diese Form der Herleitung sehr technisch und wenig erhellend.

Determinanten und Flächeninhalt

Man kann Determinanten auch geometrisch veranschaulichen.
Wir tun dies für 2×2-Determinanten.

Determinanten und Flächeninhalt

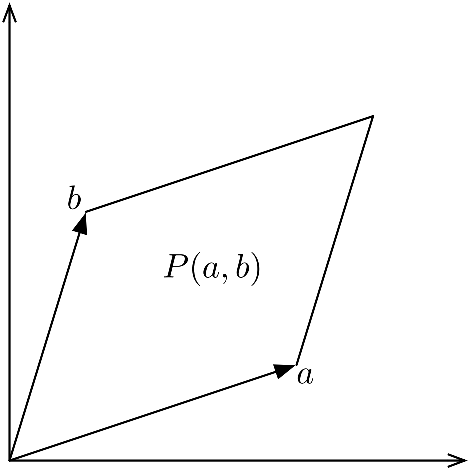
Es seien

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

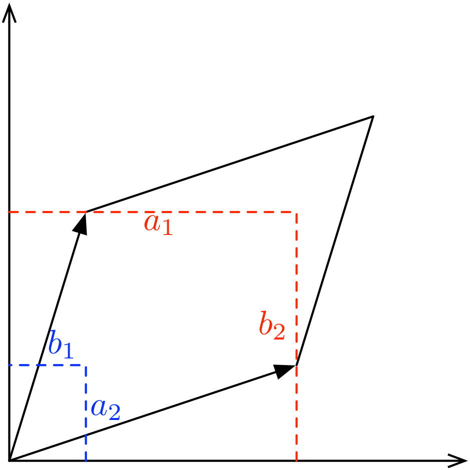
Der Flächeninhalt des Parallelogramms $P(a, b)$, das von a und b aufgespannt wird, ist

$$\mathrm{vol}_2 P(a, b) = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

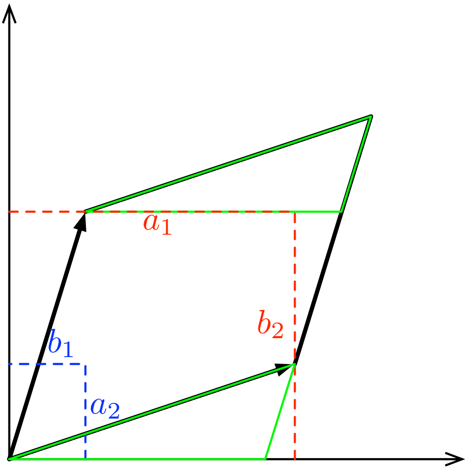
Determinanten und Flächeninhalt



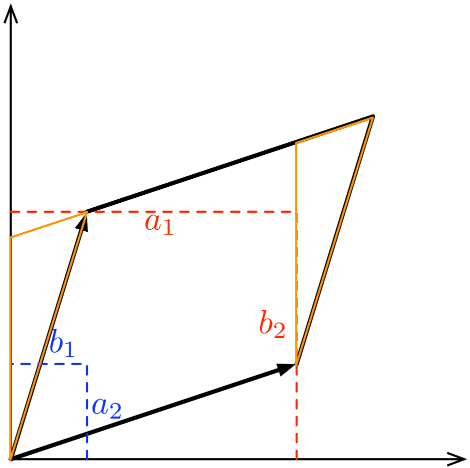
Determinanten und Flächeninhalt



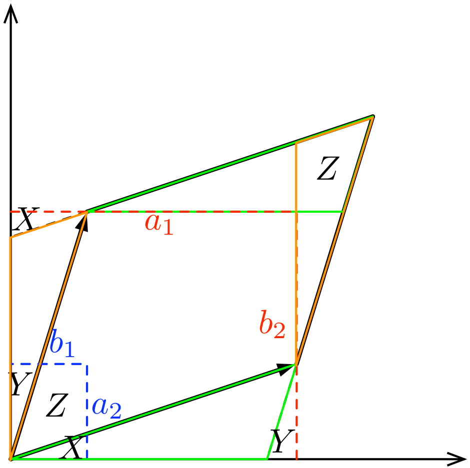
Determinanten und Flächeninhalt



Determinanten und Flächeninhalt



Determinanten und Flächeninhalt



Determinanten und Flächeninhalt

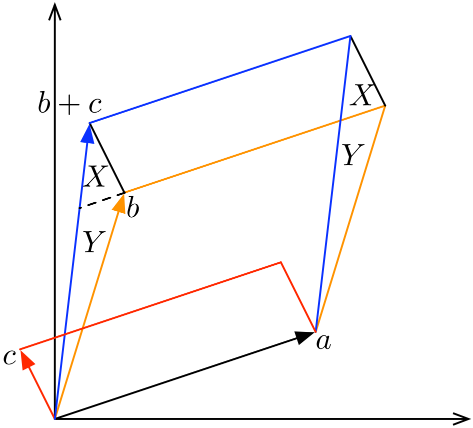
Analog gilt im $\mathbb{R}^n$:
Das Volumen des n-Spates, der von den Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannt wird, ist

$$\mathrm{vol}_n P(a_1, \ldots, a_n) = |\det(a_1 \ \ldots \ a_n)|.$$

Rechenregeln

Die Determinante ist multilinear, d.h.

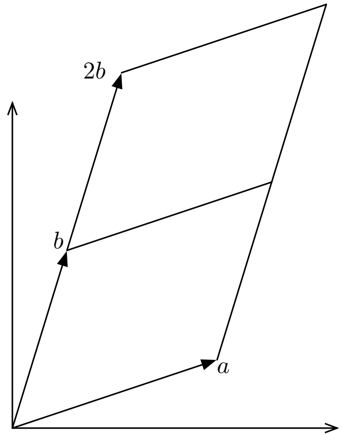
$$\det(a\ (b+c)) = \det(a\ b) + \det(a\ c).$$



Rechenregeln

Die Determinante ist multilinear, d.h.

$$\det(a \ \lambda b) = \lambda \det(a \ b).$$



Rechenregeln

Das Vorzeichen der Determinante gibt den Umlaufsinn wider.
Es gilt

$$\det(a\ b) = -\det(b\ a).$$