Beispiele: Dualraum

Beispiel 1: $V = \mathbb{K}^n$

- Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ sind die *Spalten*vektoren mit n Einträgen aus $\mathbb{K}$.
- In Kapitel 10 lernen wir, dass jede lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch eine *eindeutige* $m \times n$-Matrix A ausgedrückt werden kann, so dass $\Phi(x) = Ax$ gilt.
- Speziel für den Dualraum $V^\star$ bedeutet das, dass jeder Linearform $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ durch eine $1 \times n$-Matrix $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$, also durch eine *Zeilen*vektor ausgedrückt werden kann:

  $$\varphi(x) = Ax = (a_1 \ \dots \ a_n) \ \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n.$$

  Den Dualraum $(\mathbb{K}^n)^\star$ können wir also mit dem „Raum der Zeilenvektoren“ $\mathbb{K}^{1\times n}$ identifizieren.

- Dann haben wir einen Isomorphismus

  $$\Psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{1\times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x^\top = (x_1 \ \dots \ x_n).$$

- Für die Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ wird die Dualbasis $\{e_1^\star, \ldots, e_n^\star\}$ gerade durch die Bilder $\Psi(e_1), \ldots, \Psi(e_n)$ dargestellt, denn es gilt:

  $$e_i^\star(e_k) = \delta_{ik} = e_i^\top \cdot e_k = \Psi(e_i) \cdot e_k.$$

Beispiel 2: $V = \mathcal{C}([-1,1])$

- Die Elemente von $V = \mathcal{C}([-1,1])$ sind die stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$.

- V ist ein Vektorraum, da das Vielfache einer stetigen Funktion und die Summe von zwei stetigen Funktionen wieder stetig sind. Außerdem hat V (überabzählbar) unendliche Dimension.

- Für jede Funktion $h \in V$ definieren wir eine Linearform φ_h durch
$$\varphi_h(f) = \int_{-1}^{1} h(x)f(x)\ \mathrm{d}x.$$

- Analog zu der linearen Abbildung Ψ aus Beispiel 1 definieren wir
$$\Psi : V \to V^\star, \quad h \mapsto \varphi_h.$$

- Ψ ist injektiv: Falls $\Psi(h_1) = \Psi(h_2)$ für $h_1, h_2 \in V$, so gilt für alle $f \in V$:
$$\int_{-1}^{1} h_1(x)f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} h_2(x)f(x)\ \mathrm{d}x,$$
oder äquivalent
$$\int_{-1}^{1} (h_1(x) - h_2(x))f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$
Speziell für $f = h_1 - h_2$ also
$$\int_{-1}^{1} (h_1(x) - h_2(x))^2\ \mathrm{d}x = 0.$$
Da die Funktionen stetig sind, bedeutet dies $h_1 = h_2$.

- Also ist $V \cong \Psi(V) \subset V^\star$. Die Frage ist nun, ob Ψ auch surjektiv ist, so dass bereits $\Psi(V) = V^\star$ gilt?

- Dies ist jedoch nicht der Fall: Betrachte dazu die Linearform $\delta_0 \in V^\star$, definiert durch
$$\delta_0(f) = f(0).$$
Wir werden sehen, dass $\delta_0 \notin \Psi(V)$.

- Nehmen wir dazu das Gegenteil an, also dass eine Funktion $\delta \in V$ existiert, so dass für alle $f \in V$ gilt

$$f(0) = \delta_0(f) = \Psi(\delta)(f) = \int_{-1}^{1} \delta(x) f(x) \, \mathrm{d}x.$$

- Für dieses δ gilt $\delta(t_0) = 0$ für alle $t_0 \neq 0$, denn wäre etwa $\delta(t_0) > 0$, so gäbe es wegen der Stetigkeit von δ ein offenes Intervall U um t_0 mit $0 \notin U$, so dass $\delta(t) > 0$ für alle $t \in U$. Nun kann man aber eine stetige Funktion f finden, die $f(0) = 0$ erfüllt, aber $f(t) > 0$ für alle $t \in U$ („Hütchenfunktion über U und sonst 0"). Für dieses f müsste gelten

$$0 = \delta_0(f) \stackrel{!}{=} \int_{-1}^{1} \delta(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_U \underbrace{\delta(x) f(x)}_{>0} \, \mathrm{d}x > 0,$$

  ein Widerspruch. Insgesamt muss also $\delta(t_0) = 0$ gelten für $t_0 \neq 0$.

- Da δ außerdem stetig sein soll, folgt aus dem vorigen Punkt, dass auch $\delta(0) = 0$ gilt. Also insgesamt $\delta = 0$. Dann wäre aber auch $\varphi_\delta(f) = 0$ für alle $f \in V$, also

$$0 = \varphi_\delta = \delta_0 \neq 0,$$

  ein Widerspruch. Somit kann eine solche Funktion δ nicht in V existieren, d.h. Ψ ist nicht surjektiv.

- Man kann sogar zeigen, dass auch keine *unstetige* Funktion δ existieren kann, die $\varphi_\delta = \delta_0$ erfüllt.

- Das Beispiel zeigt, dass in unendlicher Dimension der Dualraum $V^\star$ „größer" sein kann als V.[1)]

Bemerkung: Die Linearform δ_0 heißt *Dirac-Impuls* (zum Zeitpunkt 0) und wird in der Signalverarbeitung verwendet, um Signale zu modellieren, die aus einem einzigen „unendlich starken" Impulsstoß zum Zeitpunkt 0 bestehen.

[1)] Man beachte, dass dies im Allgemeinen aber noch nicht ausschließt, dass $V \cong V^\star$ gilt!