Exkurs:
Elementaroperationen durch Matrizen darstellen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) der Form

$$Ax = b,$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^m$, verwenden wir die drei elementaren Zeilenoperationen[1)]:

(I) Vertauschen von zwei Zeilen.

(II) Ersetzen einer Zeile durch ihr λ-faches (für $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$).

(III) Ersetzen der i-ten Zeile durch die Summe i-ten Zeile und dem λ-fachen der j-ten Zeile ($i \neq j$).

Im *Gauß-Algorithmus* wendet man diese Operationen so lange an, bis man A auf seine zugehörige Gauß-Normalform $\tilde{A}$ transformiert hat.

Fakt: *Jede elementare Zeilenoperation auf A lässt sich durch Multiplikation von links mit einer invertierbaren Matrix $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ realisieren. Somit existiert eine endliche Folge invertierbarer Matrizen $T_1, \dots, T_k \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, so dass gilt:*

$$\tilde{A} = T_k \cdots T_1 \cdot A. \tag{$*$}$$

Dabei werden die Zeilenoperationen (I)-(III) jeweils durch die folgenden Matrizen realisiert:

(I) Es sei $P_{ij} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ diejenige Matrix mit Einträgen p_{kl}, so dass $p_{ij} = 1$,

[1)]Man erinnere sich, dass jede Zeile der Matrix A einer Gleichung des LGS entspricht. Insofern entsrpechen die elementaren Zeilenoperationen der Elementaroperationen für LGSe aus Kapitel 3 des Skripts.

$p_{ji} = 1$ und $p_{kk} = 1$ für $k \neq i, j$. Alle übrigen Einträge seien 0:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & & \\
& & & 0 & & & & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & & \\
& & & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & & & & 0 & & & \\
& & & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Dann ist $P_{ij}A$ die Matrix, die entsteht, wenn man bei A die i-te und j-te Zeile vertauscht.

(II) Es sei $M_i(\lambda) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ diejenige Matrix, deren i-tes Diagonalelement $\lambda \neq 0$ sei. Alle übrigen Diagonalelemente seien 1, die Einträge neben der Diagonalen seien 0:

$$M_i(\lambda) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & \lambda & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Dann ist $M_i(\lambda)A$ die Matrix, die entsteht, wenn die i-te Zeile von A mit λ multipliziert wird.

(III) Für $i \neq j$ sei $A_{ij}(\lambda)$ die Matrix mit 1 auf der Diagonalen, und dem Eintrag λ in Zeile i, Spalte j. Alle übrigen Einträge seien 0:

$$A_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix}
1 & & & \\
& \ddots & \lambda & \\
& & \ddots & \\
& & & 1
\end{pmatrix},$$

Dann ist $A_{ij}(\lambda)A$ die Matrix, die entsteht, wenn das λ-fache der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A hinzuaddiert wird.

Die Matrizen $T_1, \ldots, T_k$ in $(*)$ sind somit alle vom Typ P_{ij}, $M_i(\lambda)$ oder $A_{ij}(\lambda)$. Die Invertierbarkeit dieser Matrizen folgt daraus, dass man jede Operation durch eine geeignete Operation des gleichen Typs wieder rückgängig machen kann.

Die Operationen (I)-(III) können auch für *Spalten von* A formuliert werden. Diese Operationen werden durch Multiplikation der Matrix A mit Matrizen vom Typ $P_{ij}, M_i(\lambda), A_{ij}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *von rechts* realisiert werden. Insbesondere kann man den Gauß-Algorithmus auch spaltenweise auf A (bzw. $\tilde{A}$) anwenden. Dies führt zur folgenden Aussage:

Fakt: *Für* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *existieren endliche Folgen invertierbarer Matrizen* $T_1, \ldots, T_k \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ *und* $S_1, \ldots, S_l \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*, so dass*

$$T_k \cdots T_1 \cdot A \cdot S_1 \ldots S_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt, wobei r *der Rang von* A *ist und* E_r *die* $r \times r$*-Einheitsmatrix.*

Dabei wurde die bekannte Tatsache benutzt, dass Zeilen- und Spaltenoperationen den Rang von A nicht verändern.