Graphen und Matrizen

Graphen

Ein Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ besteht aus

- eine Menge von Knoten $i \in \mathcal{V}$ (engl. *vertex*)
- von denen gewisse Knotenpaare durch Kanten $(i, j) \in \mathcal{E}$ (engl. *edge*) verbunden sind.

Zusammenhangskomponenten

Als eine Zusammenhangskomponente von $\mathbf{G}$ bezeichnen wir einen Teilgraphen $\mathbf{G}_0$,

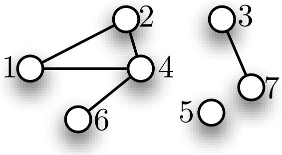
- in dem jeder Knoten von $\mathbf{G}_0$ durch einen Pfad mit jedem anderen Knoten von $\mathbf{G}_0$ verbunden ist,
- und zugleich mit keinem Knoten außerhalb von $\mathbf{G}_0$ verbunden ist.

Zusammenhangskomponenten

Als eine Zusammenhangskomponente von $\mathbf{G}$ bezeichnen wir einen Teilgraphen $\mathbf{G}_0$,

- in dem jeder Knoten von $\mathbf{G}_0$ durch einen Pfad mit jedem anderen Knoten von $\mathbf{G}_0$ verbunden ist,
- und zugleich mit keinem Knoten außerhalb von $\mathbf{G}_0$ verbunden ist.

So hat z.B. der folgende Graph 3 Zusammenhangskomponenten:



gerichtet vs. ungerichtet

- Eine Kante (i, j) fassen wir als Kante „von i nach j“ auf.
- Gilt für jede Kante $(i, j) \in \mathcal{E}$ auch $(j, i) \in \mathcal{E}$, so ist der Graph ungerichtet (zähle jedes Kantenpaar $(i, j), (j, i)$ als eine ungerichtete Kante).
- Andernfalls gerichtet.

Inzidenzmatrix

Endlicher *gerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Inzidenzmatrix

Endlicher *gerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Die (gerichtete) Inzidenzmatrix $Q \in \mathbb{R}^{k \times n}$ von $\mathbf{G}$ hat Einträge

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Kante } e_i \text{ geht von } v_j \text{ aus} \\ -1, & \text{Kante } e_i \text{ geht nach } v_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Inzidenzmatrix

Endlicher *gerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Die (gerichtete) Inzidenzmatrix $Q \in \mathbb{R}^{k \times n}$ von $\mathbf{G}$ hat Einträge

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Kante } e_i \text{ geht von } v_j \text{ aus} \\ -1, & \text{Kante } e_i \text{ geht nach } v_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beobachtung:
Jede Zeile hat genau einmal $+1$ und genau einmal -1.

Inzidenzmatrix

Satz 1

Der gerichtete Graph **G** habe n Knoten.

1. Ist **G** zusammenhängend, so ist
$$\mathrm{Rang}(Q) = n - 1.$$
2. Falls **G** aus k Zusammenhangskomponenten besteht, so gilt
$$\mathrm{Rang}(Q) = n - k.$$

ungerichtete Inzidenzmatrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

ungerichtete Inzidenzmatrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$

Die (ungerichtete) Inzidenzmatrix $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$ von $\mathbf{G}$ hat Einträge

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Kante } e_i \text{ geht von oder nach } v_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ungerichtete Inzidenzmatrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Die (ungerichtete) Inzidenzmatrix $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$ von $\mathbf{G}$ hat Einträge

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Kante } e_i \text{ geht von oder nach } v_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 2

Sei $\mathbf{G}$ zusammenhängend. Ist $\mathbf{G}$ ein *bipartiter* Graph, so ist

$$\mathrm{Rang}(M) = n - 1,$$

andernfalls

$$\mathrm{Rang}(M) = n.$$

Adjazenzmatrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Adjazenzmatrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Die Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{\times n}$ von $\mathbf{G}$ hat Einträge

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in \mathcal{V} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Adjazenzmatrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

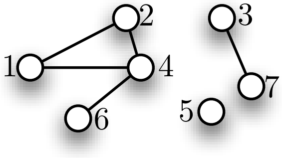
- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Die Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{\times n}$ von $\mathbf{G}$ hat Einträge

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i, j) \in \mathcal{V} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beobachtung:
A ist symmetrisch, da A ungerichtet.

Adjazenzmatrix



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}.$$

Adjazenzmatrix

Satz 2
Der (i, j)-Eintrag von A^s gibt die Anzahl der Wege der Länge s von i nach j an.

Laplace-Matrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Laplace-Matrix

Endlicher *ungerichteter* Graph $\mathbf{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$:

- $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$

Die Laplace-Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des Graphen $\mathbf{G}$ hat die Einträge

$$l_{ij} := \begin{cases} d_i, & \text{falls } i = j \text{ und genau } d_i \text{ Kanten } (i,k) \text{ von } i \text{ ausgehen} \\ -1, & \text{falls } i \neq j \text{ und die Kante } (i,j) \in \mathcal{E} \text{ existiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

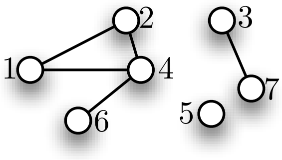
Laplace-Matrix

Beobachtung:

$$\begin{aligned} L &= D - A \\ &= Q^\top \cdot Q \end{aligned}$$

Dabei ist $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, A die Adjazenzmatrix und Q die Inzidenzmatrix (für beliebige Kantenrichtungen auf $\mathbf{G}$).

Laplace-Matrix



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}.$$

Laplace-Matrix

Satz 3

1. Die Laplace-Matrix L ist symmetrisch, diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind nicht negativ: $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$.
2. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von L zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$.
3. Für jeden Eigenwert λ von L mit Eigenvektor v gilt
$$\lambda = \frac{v^\top \cdot L \cdot v}{v^\top \cdot v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\nu} v_i^2} \cdot \Big(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} (v_i - v_j)^2 \Big).$$
4. Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda_1 = 0$ ist die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten von $\mathbf{G}$.