Multiplikation komplexer Zahlen

Frage

Wie können wir die Multiplikation mit einer festen komplexen Zahl $c \neq 0$,

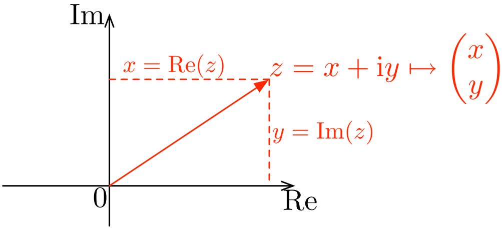
$$\mu_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto c \cdot z,$$

als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung geometrisch deuten?

Komplexe Zahlenebene

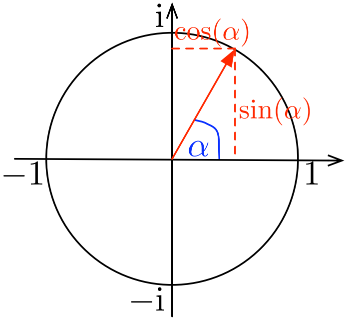
Wir dürfen die komplexe Zahlenebene als Punktmenge mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren:

$$x + \mathrm{i}y \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



$|c| = 1$

Nehmen wir zunächst an, dass $|c| = 1$ gilt.



Der Winkel α zwischen c und der reellen Achse heißt Polarwinkel.
Für $|c| = 1$ gilt:

$$\mathrm{Re}(c) = \cos(\alpha), \quad \mathrm{Im}(c) = \sin(\alpha).$$

Drehung

Für $|c| = 1$ und $z = x + \mathrm{i}y$ schreibt sich die Multiplikation

$$\begin{aligned} c \cdot z &= (\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)) \cdot (x + \mathrm{i}y) \\ &= (\cos(\alpha)x + \mathrm{i}\sin(\alpha)x + \mathrm{i}\cos(\alpha)y - \sin(\alpha)y) \\ &= (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y) + \mathrm{i}(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y). \end{aligned}$$

Identifizieren wir das Produkt $c \cdot z$ mit einem Element aus $\mathbb{R}^2$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit c (mit $|c| = 1$) beschreibt also eine Drehung um den Polarwinkel α.

Drehung

Für $|c| = 1$ und $z = x + \mathrm{i}y$ schreibt sich die Multiplikation

$$\begin{aligned} c \cdot z &= (\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)) \cdot (x + \mathrm{i}y) \\ &= (\cos(\alpha)x + \mathrm{i}\sin(\alpha)x + \mathrm{i}\cos(\alpha)y - \sin(\alpha)y) \\ &= (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y) + \mathrm{i}(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y). \end{aligned}$$

Identifizieren wir das Produkt $c \cdot z$ mit einem Element aus $\mathbb{R}^2$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit c (mit $|c| = 1$) beschreibt also eine Drehung um den Polarwinkel α.

Drehung

Für $|c| = 1$ und $z = x + \mathrm{i}y$ schreibt sich die Multiplikation

$$\begin{aligned} c \cdot z &= (\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)) \cdot (x + \mathrm{i}y) \\ &= (\cos(\alpha)x + \mathrm{i}\sin(\alpha)x + \mathrm{i}\cos(\alpha)y - \sin(\alpha)y) \\ &= (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y) + \mathrm{i}(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y). \end{aligned}$$

Identifizieren wir das Produkt $c \cdot z$ mit einem Element aus $\mathbb{R}^2$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit c (mit $|c| = 1$) beschreibt also eine Drehung um den Polarwinkel α.

Streckung

Ist nun $|c| \neq 1$, so können wir c zerlegen:

$$c = |c| \cdot \frac{c}{|c|}.$$

Dann ist $u := \frac{c}{|c|}$ eine komplexe Zahl mit $|u| = 1$ und die positive reelle Zahl $r := |c|$ ein Streckungsfaktor.
Das Produkt

$$c \cdot z = r \cdot u \cdot z$$

wird dann im $\mathbb{R}^2$ identifiziert mit

$$\begin{pmatrix} r\cos(\alpha)x - r\sin(\alpha)y \\ r\sin(\alpha)x + r\cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit c beschreibt also eine Drehung um den Polarwinkel α mit anschließender Streckung um den Faktor $r = |c|$.

Streckung

Ist nun $|c| \neq 1$, so können wir c zerlegen:

$$c = |c| \cdot \frac{c}{|c|}.$$

Dann ist $u := \frac{c}{|c|}$ eine komplexe Zahl mit $|u| = 1$ und die positive reelle Zahl $r := |c|$ ein Streckungsfaktor.
Das Produkt

$$c \cdot z = r \cdot u \cdot z$$

wird dann im $\mathbb{R}^2$ identifiziert mit

$$\begin{pmatrix} r\cos(\alpha)x - r\sin(\alpha)y \\ r\sin(\alpha)x + r\cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit c beschreibt also eine Drehung um den Polarwinkel α mit anschließender Streckung um den Faktor $r = |c|$.

Streckung

Ist nun $|c| \neq 1$, so können wir c zerlegen:

$$c = |c| \cdot \frac{c}{|c|}.$$

Dann ist $u := \frac{c}{|c|}$ eine komplexe Zahl mit $|u| = 1$ und die positive reelle Zahl $r := |c|$ ein Streckungsfaktor.
Das Produkt

$$c \cdot z = r \cdot u \cdot z$$

wird dann im $\mathbb{R}^2$ identifiziert mit

$$\begin{pmatrix} r\cos(\alpha)x - r\sin(\alpha)y \\ r\sin(\alpha)x + r\cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit c beschreibt also eine Drehung um den Polarwinkel α mit anschließender Streckung um den Faktor $r = |c|$.

Streckung

Ist nun $|c| \neq 1$, so können wir c zerlegen:

$$c = |c| \cdot \frac{c}{|c|}.$$

Dann ist $u := \frac{c}{|c|}$ eine komplexe Zahl mit $|u| = 1$ und die positive reelle Zahl $r := |c|$ ein Streckungsfaktor.
Das Produkt

$$c \cdot z = r \cdot u \cdot z$$

wird dann im $\mathbb{R}^2$ identifiziert mit

$$\begin{pmatrix} r\cos(\alpha)x - r\sin(\alpha)y \\ r\sin(\alpha)x + r\cos(\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit c beschreibt also eine Drehung um den Polarwinkel α mit anschließender Streckung um den Faktor $r = |c|$.