Rechnen mit Matrizen

Addition von Matrizen

Zwei Matrizen A und B mit gleicher Zeilenzahl m und gleicher Spaltenzahl n können addiert werden.

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Multiplikation von Matrizen

- Zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ können multipliziert werden, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist, also falls $n = p$.
- Dann hat AB m Zeilen und q Spalten.

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Wir können A und B multiplizieren, da A vier Spalten und B vier Zeilen hat.
Das Produkt $C = AB$ muss dann eine 3×2 Matrix sein:

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$? = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = 8$$

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} 8 & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$? = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 = 1$$

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$? = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = -6$$

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -6 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$? = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 32$$

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -6 & 32 \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$? = -1 \cdot 0 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 23$$

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -6 & 32 \\ 23 & {\color{green}?} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ {\color{red}-1} & {\color{red}9} & {\color{red}2} & {\color{red}1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & {\color{blue}2} \\ 3 & {\color{blue}3} \\ -1 & {\color{blue}5} \\ -2 & {\color{blue}7} \end{pmatrix}$$

$${\color{green}?} = {\color{red}-1} \cdot {\color{blue}2} + {\color{red}9} \cdot {\color{blue}3} + {\color{red}2} \cdot {\color{blue}5} + {\color{red}1} \cdot {\color{blue}7} = {\color{green}42}$$

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

Also:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -6 & 32 \\ 23 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix

Die transponierte Matrix $A^\top$ erhält man aus A, indem man die Einträge von A „an der Diagonalen spiegelt“,
d.h. der Eintrag a_{ij} in Zeile i, Spalte j von A
wird der Eintrag b_{ji} in Zeile j, Spalte i von $A^\top$.

Beispiel: Transponierte Matrix (quadratisch)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Transponierte Matrix (nicht quadratisch)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Inverse

Eine $n \times n$-Matrix A heißt invertierbar, wenn es eine $n \times n$-Matrix A^{-1} gibt, die

$$A^{-1} \cdot A = I_n = A \cdot A^{-1}$$

erfüllt.

Wie kann man feststellen, ob A eine Inverse besitzt und diese dann bestimmen?

Inverse bestimmen 3×3

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Einträge der Inversen A^{-1} (sofern diese existiert) sollen mit x_{ij} bezeichnet werden.

Inverse bestimmen 3×3

Dann ist die Invertierbarkeitsbedingung $A \cdot A^{-1} = I_n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dies führt auf drei *unabhängige* lineare Gleichungssysteme - eines für jede Spalte von A^{-1}:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Inverse bestimmen 3×3

Da diese Gleichungssysteme unabhängig sind, kann der Gauß-Algorithmus simultan auf sie angewendet werden. So erhalten wir als Lösung die Einträge von A^{-1}, sofern die Gleichungssysteme lösbar sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right).$$

Falls eine Lösung existiert, ist sie eindeutig (da wir genauso viele Gleichungen wie Variablen haben).