Basen von Schnitt und Summe berechnen

Voraussetzung

Es seien U_1, U_2 Untervektorräume von $\mathbb{K}^n$.
Wir wollen Basen des Schnittes

$$U_1 \cap U_2$$

und der Summe

$$U_1 + U_2$$

bestimmen.

Bezeichnung

- Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass U_1 und U_2 jeweils von drei Vektoren erzeugt werden können.
- Wir bezeichnen die erzeugenden Vektoren von U_1 und U_2 wie folgt:
$$U_1 = [a_1, a_2, a_3], \quad U_2 = [b_1, b_2, b_3].$$

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

Für jeden Vektor $x \in U_1 \cap U_2$ gilt:

- x ist sowohl als Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, a_3 als auch als Linearkombination der Vektoren b_1, b_2, b_3 darstellbar.
- Genauer:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

  für gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{K}$.
- Oder äquivalent:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3 = 0.$$

  Dies stellt ein homogenes LGS mit Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ dar. Die Matrix des LGS ist

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3). \qquad (*)$$

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

Für jeden Vektor $x \in U_1 \cap U_2$ gilt:

- x ist sowohl als Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, a_3 als auch als Linearkombination der Vektoren b_1, b_2, b_3 darstellbar.
- Genauer:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

  für gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{K}$.
- Oder äquivalent:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3 = 0.$$

  Dies stellt ein homogenes LGS mit Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ dar. Die Matrix des LGS ist

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3). \qquad (*)$$

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

Für jeden Vektor $x \in U_1 \cap U_2$ gilt:

- x ist sowohl als Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, a_3 als auch als Linearkombination der Vektoren b_1, b_2, b_3 darstellbar.
- Genauer:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

  für gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{K}$.
- Oder äquivalent:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3 = 0.$$

  Dies stellt ein homogenes LGS mit Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ dar. Die Matrix des LGS ist

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3). \qquad (*)$$

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

Für jeden Vektor $x \in U_1 \cap U_2$ gilt:

- x ist sowohl als Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, a_3 als auch als Linearkombination der Vektoren b_1, b_2, b_3 darstellbar.
- Genauer:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

  für gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{K}$.
- Oder äquivalent:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3 = 0.$$

  Dies stellt ein homogenes LGS mit Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ dar. Die Matrix des LGS ist

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3). \qquad (*)$$

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

Für jeden Vektor $x \in U_1 \cap U_2$ gilt:

- x ist sowohl als Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, a_3 als auch als Linearkombination der Vektoren b_1, b_2, b_3 darstellbar.
- Genauer:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

  für gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{K}$.
- Oder äquivalent:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3 = 0.$$

  Dies stellt ein homogenes LGS mit Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ dar. Die Matrix des LGS ist

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3). \qquad (*)$$

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

- Als Lösung des LGS $(*)$ erhalten wir die Koeffizienten von Linearkombinationen,
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \hline \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3, \end{pmatrix} \qquad (**)$$
die Elemente des Schnitts $U_1 \cap U_2$ parametrisieren.
- Eine Erzeugermenge für $U_1 \cap U_2$ erhält man, indem man für jeden Lösungsvektor der Form $(**)$
$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \quad \textit{oder} \quad \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$
auswählt.
- Aus der Erzeugermenge kann man eine Basis bestimmen.

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

- Als Lösung des LGS $(*)$ erhalten wir die Koeffizienten von Linearkombinationen,

$$\left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \hline \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3, \end{array}\right) \qquad (**)$$

die Elemente des Schnitts $U_1 \cap U_2$ parametrisieren.

- Eine Erzeugermenge für $U_1 \cap U_2$ erhält man, indem man für jeden Lösungsvektor der Form $(**)$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \quad \textit{oder} \quad \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

auswählt.

- Aus der Erzeugermenge kann man eine Basis bestimmen.

Ansatz für $U_1 \cap U_2$

- Als Lösung des LGS $(*)$ erhalten wir die Koeffizienten von Linearkombinationen,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \hline \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3, \end{pmatrix} \qquad (**)$$

die Elemente des Schnitts $U_1 \cap U_2$ parametrisieren.

- Eine Erzeugermenge für $U_1 \cap U_2$ erhält man, indem man für jeden Lösungsvektor der Form $(**)$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \quad oder \quad \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

auswählt.

- Aus der Erzeugermenge kann man eine Basis bestimmen.

Warnung

Verwechseln Sie nicht den Lösungsraum des LGS $(*)$ mit dem Schnitt $U_1 \cap U_2$ selbst!

Ansatz für $U_1 + U_2$

Für einen Vektor $y \in U_1 + U_2$ gilt:

- y ist Linearkombination von Vektoren aus $U_1 \cup U_2$.
- Genauer: y ist Linearkombination von Vektoren aus der Vereinigung der beiden jeweiligen Erzeugermengen,

  $$\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}.$$

  Also ist $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ Erzeugermenge von $U_1 + U_2$.
- Um aus der Erzeugermenge eine Basis zu gewinnen, bestimmt man eine maximale linear unabhängige Teilmenge mit dem LGS

  $$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3).$$

  Basisvektoren sind diejenigen Spalten, deren Nummern nach Transformation auf Gauß-Normalform ein Stufenindex sind.
- Dieses LGS ist das selbe wie LGS $(*)$.

Ansatz für $U_1 + U_2$

Für einen Vektor $y \in U_1 + U_2$ gilt:

- y ist Linearkombination von Vektoren aus $U_1 \cup U_2$.
- Genauer: y ist Linearkombination von Vektoren aus der Vereinigung der beiden jeweiligen Erzeugermengen,

  $$\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}.$$

  Also ist $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ Erzeugermenge von $U_1 + U_2$.
- Um aus der Erzeugermenge eine Basis zu gewinnen, bestimmt man eine maximale linear unabhängige Teilmenge mit dem LGS

  $$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3).$$

  Basisvektoren sind diejenigen Spalten, deren Nummern nach Transformation auf Gauß-Normalform ein Stufenindex sind.
- Dieses LGS ist das selbe wie LGS $(*)$.

Ansatz für $U_1 + U_2$

Für einen Vektor $y \in U_1 + U_2$ gilt:

- y ist Linearkombination von Vektoren aus $U_1 \cup U_2$.
- Genauer: y ist Linearkombination von Vektoren aus der Vereinigung der beiden jeweiligen Erzeugermengen,

$$\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}.$$

  Also ist $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ Erzeugermenge von $U_1 + U_2$.
- Um aus der Erzeugermenge eine Basis zu gewinnen, bestimmt man eine maximale linear unabhängige Teilmenge mit dem LGS

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3).$$

  Basisvektoren sind diejenigen Spalten, deren Nummern nach Transformation auf Gauß-Normalform ein Stufenindex sind.
- Dieses LGS ist das selbe wie LGS $(*)$.

Ansatz für $U_1 + U_2$

Für einen Vektor $y \in U_1 + U_2$ gilt:

- y ist Linearkombination von Vektoren aus $U_1 \cup U_2$.
- Genauer: y ist Linearkombination von Vektoren aus der Vereinigung der beiden jeweiligen Erzeugermengen,

$$\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}.$$

  Also ist $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ Erzeugermenge von $U_1 + U_2$.
- Um aus der Erzeugermenge eine Basis zu gewinnen, bestimmt man eine maximale linear unabhängige Teilmenge mit dem LGS

$$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3).$$

  Basisvektoren sind diejenigen Spalten, deren Nummern nach Transformation auf Gauß-Normalform ein Stufenindex sind.
- Dieses LGS ist das selbe wie LGS $(*)$.

Ansatz für $U_1 + U_2$

Für einen Vektor $y \in U_1 + U_2$ gilt:

- y ist Linearkombination von Vektoren aus $U_1 \cup U_2$.
- Genauer: y ist Linearkombination von Vektoren aus der Vereinigung der beiden jeweiligen Erzeugermengen,

  $$\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}.$$

  Also ist $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ Erzeugermenge von $U_1 + U_2$.
- Um aus der Erzeugermenge eine Basis zu gewinnen, bestimmt man eine maximale linear unabhängige Teilmenge mit dem LGS

  $$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3).$$

  Basisvektoren sind diejenigen Spalten, deren Nummern nach Transformation auf Gauß-Normalform ein Stufenindex sind.
- Dieses LGS ist das selbe wie LGS $(*)$.

Ansatz für $U_1 + U_2$

Für einen Vektor $y \in U_1 + U_2$ gilt:

- y ist Linearkombination von Vektoren aus $U_1 \cup U_2$.
- Genauer: y ist Linearkombination von Vektoren aus der Vereinigung der beiden jeweiligen Erzeugermengen,

  $$\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}.$$

  Also ist $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ Erzeugermenge von $U_1 + U_2$.
- Um aus der Erzeugermenge eine Basis zu gewinnen, bestimmt man eine maximale linear unabhängige Teilmenge mit dem LGS

  $$(a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid -b_1 \mid -b_2 \mid -b_3).$$

  Basisvektoren sind diejenigen Spalten, deren Nummern nach Transformation auf Gauß-Normalform ein Stufenindex sind.
- Dieses LGS ist das selbe wie LGS $(*)$.

Ansatz für $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$

Wir stellen also fest, dass wir mit dem LGS $(*)$ sowohl

- eine Erzeugermenge für $U_1 \cap U_2$
- als auch eine Basis für $U_1 + U_2$

bestimmen können.