Vektoren und Pfeile

Vektorräume

Wir haben die abstrakte Definition eines Vektorraums V kennengelernt:

V1 Mit der Vektoraddition $+$ ist V eine abelsche Gruppe.

V2 Bezüglich der Skalarmultiplikation gelten folgende Regeln:

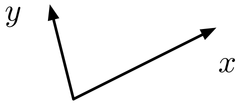
1. $1 \cdot x = x$
2. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
3. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
4. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

Hierbei sind λ, μ Skalare und x, y Vektoren.

Pfeile

Aus der Schule:

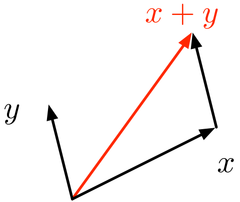
- Vektoren sind „Pfeile“ in der Ebene oder im Raum.
- Also Größen, die durch eine Richtung und einen Betrag gegeben sind.



Betrachten wir die Vektorraumaxiome aus dieser Sicht!

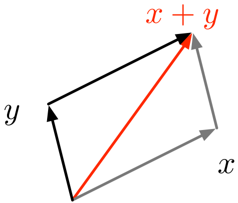
V1 Addition

Die Summe $x + y$ zweier Vektoren x, y wird gebildet, indem der Pfeil y an der Spitze des Pfeils x befestigt wird.



V1 Parallelogramm der Kräfte

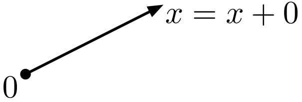
Man erhält den selben Vektor, wenn man stattdessen den Pfeil x an der Spitze des Pfeils y befestigt.



Die Vektoraddition ist also kommutativ.

V1 Nullvektor

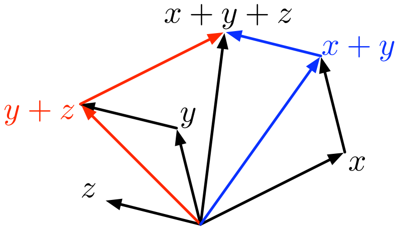
Der Nullvektor ist ein Vektor mit Länge 0 und ohne Richtung.



Der Nullvektor ist das neutrale Element der Addition:
Einen „Pfeil der Länge 0“ an x zu befestigen, ändert x nicht.

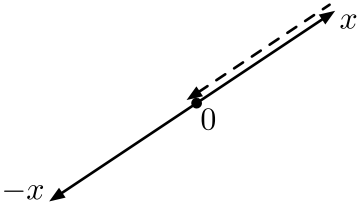
V1 Assoziativität

Die Addition ist assoziativ.



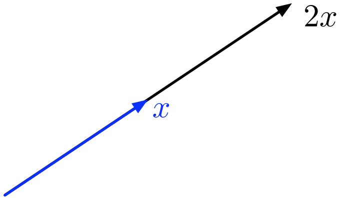
V1 Pfeilrichtung umdrehen

Das inverse Element des Pfeils x ist der umgedrehte Pfeil $-x$ mit gleicher Länge und umgekehrter Richtung.



V2 Skalarmultiplikation

Ist λ eine reelle Zahl, so ist das λ-fache eines Pfeils x derjenige Pfeil, der die selbe Richtung wie x hat, aber der um das λ-fache gestreckt wurde.



V2 (1)

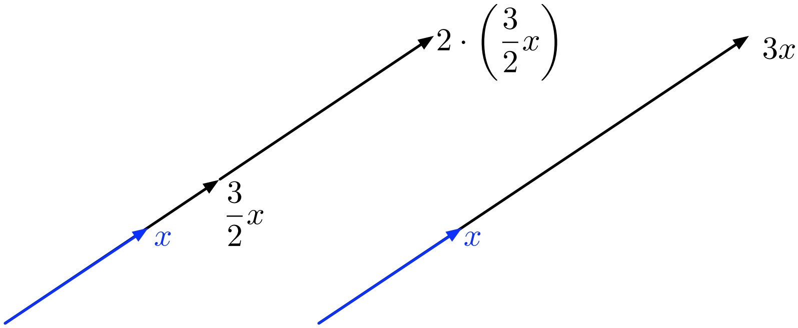
Die Bedingung $1 \cdot x = x$ soll vermeiden, dass auch „pathologische“ Fälle als Vektorräume betrachtet werden können, wie z.B. wenn man

$$\lambda \cdot x = 0$$

für alle Skalare λ und Vektoren x definiert.

V2 (2) und (3)

Wiederholtes Skalieren durch λ und μ unterscheidet sich nicht vom einmaligen Skalieren durch $\lambda\mu$.



Entsprechend unterscheidet sich die Skalierung um $\lambda + \mu$ nicht von der Summe der skalierten Vektoren λx und μx.

V2 (4)

Es gilt der Strahlensatz: