Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
PDoz. Gabriele Link
Dipl. Math. Rafaela Rollin

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (P)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{5\times 5}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ * & 0 & \# \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ den Rang von A^k.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $*$ und $\#$ den Rang von B .

Aufgabe 2 (P)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{p\times q}$ sowie $B \in \mathbb{K}^{q\times r}$.
Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang}(AB) \leq \operatorname{Rang}(A)$ und $\operatorname{Rang}(AB) \leq \operatorname{Rang}(B)$ gilt.

Aufgabe 3

Im Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ sei der Untervektorraum

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

gegeben, womit der Faktorraum $\mathbb{Q}^3 / U$ gebildet werde.

a) Geben Sie für die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

die Äquivalenzklassen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\widetilde{3x+y}$ an.

b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{Q}^3 / U$.

c) Stellen Sie die Vektoren

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}} \in \mathbb{Q}^3 / U$$

bezüglich der Basis B dar. Sind diese beiden Vektoren linear unabhängig?

Aufgabe 4 (*Wiederholung: Gruppen*)

Auf $\mathbb{Z}$ sei eine Verknüpfung $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ erklärt durch $\alpha \circ \beta := \alpha + \beta + 5$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ isomorphe Gruppen sind.

c) Lösen Sie die Gleichung $x \circ x = 21$ in $(\mathbb{Z}, \circ)$.

Aufgabe 5 (*Wiederholung: Gruppenhomomorphismen*)

Es seien $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G und $(H, \cdot)$ eine weitere Gruppe.

a) Geben Sie die Definition eines Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow H$ an und beweisen Sie, dass für solch einen Gruppenhomomorphismus $\Phi(e_G)$ das neutrale Element von H ist.

b) Nun besitze G die Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ eine ungerade natürliche Zahl n existiert mit $g^n = e_G$.
Zeigen Sie, dass es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow \{1, -1\}$ gibt.

Aufgabe 6 (*Wiederholung: Lineare Unabhängigkeit*)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

a) Seien $a_1, a_2, a_3 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.
Zeigen Sie:
$$[a_1, a_2] = [a_1, a_3].$$

b) Seien $a_1, \ldots, a_n \in V \setminus \{0\}$.
Beweisen Sie, dass $a_1, \ldots, a_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn gilt
$$[a_1, \ldots, a_i] \cap [a_{i+1}, \ldots, a_n] = \{0\} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1.$$

Aufgabe 7 (*Wiederholungsfragen*)

a) Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe?

b) Ist $(\mathbb{Z}\,/n\,\mathbb{Z}, +, \cdot)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Körper?

c) Ist jeder Körperhomomorphismus $\Phi \neq 0$ injektiv?

d) Kommutiert eine Diagonalmatrix mit jeder beliebigen anderen Matrix der selben Dimension?

e) Wann heißt eine Menge von Vektoren linear unabhängig?

f) Gibt es fünf linear unabhängige Elemente im Vektorraum $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid deg(f) \leq 3\}$?

g) Können zwei verschieden Basen eines Vektorraums unterschiedlich viele Elemente haben?

h) Wie sehen die Komponentenvektoren der Elemente einer beliebigen Basis B bezüglich B aus?

i) Ist die Vereinigung von Untervektorräumen im Allgemeinen wieder ein Untervektorraum?

j) Wie sehen eindimensionale Untervektorräume im $\mathbb{R}^2$ aus?

Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch!

Abgabe der Lösungen bis zum 09.01.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.