

## Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik

### Übungsblatt 13

#### Aufgabe 1 (P)

Es sei  $B := \{b_1, \dots, b_5\}$  eine Basis eines reellen Vektorraums  $V$  und  $\Phi$  ein Endomorphismus von  $V$  mit

$$\begin{aligned}\Phi(b_1) &= 4b_1 + 2b_2 - 2b_4 - 3b_5 \\ \Phi(b_2) &= -2b_3 + b_5 \\ \Phi(b_3) &= -4b_2 + 2b_3 - b_5 \\ \Phi(b_4) &= -2b_1 + 3b_3 + b_4 - b_5 \\ \Phi(b_5) &= 3b_2 + 2b_5.\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von  $\Phi$  und  $\Phi \circ \Phi$  bezüglich  $B$ .
- Ist  $\Phi$  bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie: Die Menge  $C := \{c_1, c_2, c_3\}$ , bestehend aus den Vektoren

$$c_1 := b_2 + b_3 + b_5, \quad c_2 := -b_3 + b_5, \quad c_3 := b_2 + b_5,$$

ist Basis eines Untervektorraums  $U$  von  $V$  mit  $\Phi(U) \subset U$ .

- Berechnen Sie die Abbildungsmatrix des Endomorphismus  $\Phi|_U : U \rightarrow U$  (das ist die Einschränkung von  $\Phi$  auf  $U$ ) bezüglich  $C$ .

#### Aufgabe 2 (P)

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum und  $\Phi \in \text{End}(V)$ . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- $V = \text{Kern}(\Phi) \oplus \text{Bild}(\Phi)$ .
- $\text{Kern}(\Phi) = \text{Kern}(\Phi^2)$ .
- $\text{Bild}(\Phi) = \text{Bild}(\Phi^2)$ .

#### Aufgabe 3

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Bestimmen Sie eine (geordnete) Basis  $B$  von  $\mathbb{R}^4$  und eine (geordnete) Basis  $C$  von  $\mathbb{R}^3$ , so dass  $\Psi$  bezüglich der Basen  $B$  und  $C$  folgende Abbildungsmatrix hat:

$$M_C^B(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

Abgabe der Lösungen bis zum 30.01.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.