

Lineare Algebra I für die Fachrichtung Informatik Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (P)

a) Gegeben seien eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^4 . Bestimmen Sie eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, v_3\}$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von \mathbb{R}^4 .

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{3X - X^5, 4X + X^3, 5X - X^5 - X^6\}$$

in $\mathbb{Q}[X]$ linear unabhängig ist.

Erweitern Sie diese Menge zu einer Basis von $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid \deg f \leq 6\}$.

Aufgabe 2 (P)

a) Es seien im \mathbb{R}^4 die Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \bar{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B nach \bar{B} .

b) Für den Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[X]$ vom Grad ≤ 3 seien die folgenden drei Basen gegeben:

$$B_1 := \{1 - X^2 + X^3, X - X^2, 1 - X + X^2, 1 - X\},$$

$$B_2 := \{1 - X^3, 1 - X^2, 1 - X, 1 + X^2 - X^3\},$$

$$B_3 := \{1, X, X^2, X^3\}.$$

Geben Sie die folgenden Komponentenvektoren in \mathbb{R}^4 an:

$$\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_1,$$

$$\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_1,$$

$$\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_2,$$

$$\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_2,$$

$$\Theta_{B_2}(b) \text{ für alle } b \in B_1.$$

Bestimmen Sie außerdem die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B_2 nach B_1 .

Aufgabe 3

Es seien V ein \mathbb{K} -Vektorraum sowie M_1 und M_2 Teilmengen von V . Zeigen Sie:

- a) $[M_1 \cap M_2] \subset [M_1] \cap [M_2]$.
- b) In (a) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit.
- c) $[M_1 \cup M_2] = \left[[M_1] \cup [M_2] \right]$ und insbesondere $[[M]] = [M]$.

Abgabe der Lösungen bis zum 12.12.2016 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.