Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Moritz Gruber
M. Sc. Julia Heller

Lineare Algebra II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (P)

Sei $V \subset \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der reellen Polynome von Grad ≤ 2.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$P(f,g) := \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

eine Bilinearform auf $V \times V$ definiert ist.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Bilinearform P bezüglich der Basis $B := \{1, x, x^2\}$ sowie bezüglich der Basis $C := \{x^2 + 2, -2x - 1, x + x^2\}$.

c) Überprüfen Sie, ob P ein Skalarprodukt auf V ist.

Aufgabe 2 (P)

Es sei V der Vektorraum der rellen $n \times n$ - Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(A^\top B), \qquad A, B \in V,$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

b) Es sei $\|\cdot\|$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V und $\|\cdot\|_2$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie: Für alle $A \in V, v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Av\|_2 \leq \|A\| \cdot \|v\|_2.$$

Aufgabe 3

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in V$ gibt, wenn sich für jedes Paar linear unabhängiger Vektoren $x, y \in V$ die Menge

$$M_{x,y} := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \|sx + ty\| = 1\}$$

durch eine Gleichung der Form $as^2 + 2bst + ct^2 = 1$ mit reellen Koeffizienten a, b, c beschreiben lässt.

Abgabe der Lösungen bis zum 19.05.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.