Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Moritz Gruber
M. Sc. Julia Heller

Lineare Algebra II
Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (P)

a) Bestimmen Sie für folgenden Untervektorraum U des $\mathbb{R}^5$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standard-Skalarprodukts:

$$U = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right].$$

b) Ergänzen Sie die gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 2 (P)

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und $\| \cdot \|$ die induzierte Norm. Weiter sei die Abbildung

$$D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1) =: x^\perp$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass D linear ist und skizzieren Sie wie D abbildet.

b) Zeigen Sie für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ die folgenden Identitäten:

i) $\langle x^\perp, y \rangle = \det(x, y)$,

ii) $\langle x^\perp, y \rangle z + \langle y^\perp, z \rangle x + \langle z^\perp, x \rangle y = 0$,

iii) $|\langle x^\perp, y \rangle| = \|x\| \|y\| \cdot |\sin(\omega(x, y))|$ wobei $\omega(x, y)$ den Winkel zwischen x und y bezeichne.

c) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 3

Es seien V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig. Weiter gelte $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle^2$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist.

Abgabe der Lösungen bis zum 26.05.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.